TEOREMAS DO TIPO MINIMAX

José Pastana de Oliveira Neto

Rfb Editora

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
91 98885-7730
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

Editor-Chefe
Prof. Dr. Ednilson Souza
Diagramação, revisão de texto e capa
Autor

Bibliotecária
Janaina Karina Alves Trigo Ramos
Produtor editorial
Nazareno Da Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

T314

Teoremas do Tipo Minimax / José Pastana de Oliveira Neto –Belém: RFB, 2023.

16 x 23 cm
Livro em pdf.

ISBN 978-65-5889-603-6
DOI 10.46898/rfb.f4caf7a2-57a4-490e-b362-c9b2a0e72c32

1. Matemática. I. Oliveira Neto, José Pastana de II. Título.

CDD 510

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática.

Prefácio

Sobre o Livro

Neste livro é feita a apresentação e demonstração de alguns teoremas do tipo Minimax, quem tem provado ser grandes ferramentas da matemática atual, entre eles temos, o teorema do ponto de sela, teorema do passo da montanha, e por fim uma generalização do passo da montanha, em que são aplicações do grau topológico.

Conteúdo

Capítulo 1

Teoremas de Deformação

1.1 Calculo Diferencial em espaço de Banach

Definição 1 *Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que uma aplicação $\psi : U \to F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que*

$$\psi(x_0 + h) = \psi(x_0) + A(h) + r(x_0, h),$$

para todo h, tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0, e contida em U, onde $r(x_0, h) = o(\|h\|)$, isto é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso A é chamada de derivada de Fréchet de ψ em x_0, a derivada de Fréchet no ponto x_0, quando existe, é única, denotamos por $\psi'(x_0)$.

Definição 2 *Se B é um aberto de um espaço de Banach X, dizemos que ψ é de classe C^1 em B, ou que $\psi \in C^1(B, \mathbb{R})$ quando a derivada de*

Fréchet de ψ existe em todo $x \in B$ e a aplicação $\psi' : B \to X'$ é contínua. Onde X' denotará o dual de X.

Definição 3 *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\psi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que ψ possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existem um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(u+tv) - \psi(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \textit{para todo} \;\; v \in X.$$

Definição 4 *Um campo pseudo-gradiente para $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente lipshitziana, $V : Y \to X$, onde,*

$$Y = \{u \in X \mid \psi'(u) \neq 0\}, \tag{1.1}$$

satisfazendo as seguintes condições:

1) $\|V(u)\| \leq 2 \|\psi'(u)\|$

2) $\psi'(u).V(u) \geq \|\psi'(u)\|^2$

(Veja a definição de $\psi'(u)$, em 1)

Lema 1 *Sob as hipóteses da definição acima, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y.*

Demonstração: Dado $u \in Y$, temos $\psi'(u) \neq 0$ e

$$\|\psi'(u)\| = \sup\{\langle \psi'(u), w \rangle : \|w\| = 1\}.$$

Segue da definição de supremo que, dado

$$\epsilon = \frac{\|\psi'(u)\|}{3} > 0,$$

existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \psi'(u), w_u \rangle > \|\psi'(u)\| - \epsilon.$$

Então

$$\langle \psi'(u), w_u \rangle > \frac{2}{3} \|\psi'(u)\| .$$

Consideremos a função $v : Y \longrightarrow X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| \, w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| < 2 \|\psi'(u)\| . \tag{1.2}$$

Por outro lado, vem

$$\langle \psi'(u), v \rangle = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| \langle \psi'(u), w_u \rangle ,$$

daí

$$\langle \psi'(u), v \rangle > \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| \frac{2}{3} \|\psi'(u)\| ,$$

logo,

$$\langle \psi'(u), v \rangle > \|\psi'(u)\|^2 .$$

Como ψ' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de v em Y tal que

$$\|v\| < 2 \|\psi'(w)\| , \quad \forall \ w \in N_u \tag{1.3}$$

e

$$\langle \psi'(w), v \rangle > \|\psi'(w)\|^2 \quad \forall \ w \in N_u. \tag{1.4}$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y, como Y é métrico, logo, é paracompacto, (ver [5]), podemos refinar a cobertura N_u por uma cobertura aberta localmente finita, em outras palavras, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y. No que segue, considerando

$$\rho_i(u) = dist\,(u, (N_{u_i})^c) , \quad \forall \ u \in Y,$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i \quad \forall \ u \in Y \tag{1.5}$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2} \|\psi'(u_i)\| \, w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, daí, cada $u \in Y$, só pertence apenas a um número finito de N_{u_i}. Logo as somas definidas em (1.5) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i}. Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos vetores $v_i'.s$, que verificam

$$\|v_i\| < 2 \|\psi'(u)\|, \quad \forall \; u \in N_{u_i},$$

e

$$\langle \psi'(u), v_i \rangle > \|\psi'(u)\|^2, \quad \forall \; u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$, vem

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_i = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_1 + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_n$$

implicando

$$\|V(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_1\| + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_n\|.$$

Portanto

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)}. \sum_{i=1}^{n} \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u, segue que

$$\|V(u)\| \leq 2 \|\psi'(u)\|$$

e

$$\langle \psi'(u), V(u) \rangle \geq \|\psi'(u)\|^2.$$

Vamos mostrar agora que, V é localmente Lipschitziana, para isso, basta mostrarmos que a parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)}. \|v_i\|$$

é localmente Lipschitziana. Note que para cada i, $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente Lipschitziana. Para tanto, Considerando z arbitrário tal que $u, v \in U_z$, temos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)},$$

de onde segue

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_1(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_1(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}$$

onde

$$\alpha = \left[\rho_1(u) + \rho_2(u)\right].\left[\rho_1(v) + \rho_2(v)\right].$$

Então

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}.$$

Assim, somando e subtraindo $\rho_1(v)\rho_2(v)$ no numerador da fração acima, obtemos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)\left[\rho_1(u) - \rho_1(v)\right]}{\alpha} + \frac{\rho_1(v)\left[\rho_2(v) - \rho_2(u)\right]}{\alpha}$$

e ainda

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha}\left|\rho_1(u) - \rho_1(v)\right| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha}\left|\rho_2(v) - \rho_2(u)\right|.$$

Ora, sendo ρ_1, ρ_2 funções Lipschitzianas, temos que existem, $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\left|\rho_1(u) - \rho_1(v)\right| \leq K_1\|u - v\| \quad e \quad \left|\rho_2(v) - \rho_2(u)\right| \leq K_2\|u - v\|.$$

Portanto

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha}K_1\|u - v\| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha}K_2\|u - v\|.$$

Desde que $\rho_1(u)+\rho_2(u)>0$, existe $a>0$ tal que $\rho_1(u)+\rho_2(u)>a>0$, como ρ_1,ρ_2, são funções contínuas, logo existe uma vizinhança U_z de u tal que

$$\rho_1(v)+\rho_2(v)>a \ \ \forall\ v\in U_z.$$

Com isso

$$|g(u)-g(v)|\leq \frac{1}{a}K_1\left\|u-v\right\|+\frac{1}{a}K_2\left\|u-v\right\|,$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)}\leq 1, \quad \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)}\leq 1.$$

Logo

$$|g(u)-g(v)|\leq \frac{1}{a}\left(K_1+K_2\right)\left\|u-v\right\|, \quad \forall\ u,v\in V_z.$$

Mostrando assim que g é localmente lipschitziana. Concluíndo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ψ em Y. ∎

Definição 5 *Seja* $\psi : X\to\mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1 *num espaço de Banach* X*. Dizemos que* $c\in\mathbb{R}$ *é um valor crítico de* ψ *se* $\psi(u)=c$ *para algum ponto crítico* $u\in X$*. O conjunto de todos os pontos críticos no nível* c *será designado por* K_c *, isto é,*

$$K_c=\left\{u\in X \mid \psi'(u)=0,\ \psi(u)=c\right\}. \tag{1.6}$$

Também, designamos por ψ^c *o conjunto de todos os pontos* u*, em níveis menores ou iguais a* c*, isto é,*

$$\psi^c=\left\{u\in X \mid \psi(u)\leq c\right\}. \tag{1.7}$$

1.2 Os Teoremas de Deformação

Um ingrediente fundamental para os métodos topológicos que consideraremos é o chamado Teorema de Deformação. A grosso modo, ele nos diz quando e como podemos deformar um funcional no nível ψ^{c_1} em ψ^{c_2} nível, para $c_1 > c_2$ ou $c_1 < c_2$.

Teorema 1 *(**Teorema de Deformação**): Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 no Espaço de Banach X. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \tag{1.8}$$

para todo $u \in \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$. Então existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Onde, dados um subconjunto $S \subset X$ e $\delta > 0$, S_δ designa a vizinhança fechada de S, definida por:

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u,s) \leq \delta\}.$$

Demonstração: Consideremos os seguintes subconjuntos de X:

$$A = \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \psi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_\delta.$$

Pelo lema 1, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y, onde

$$Y = \{u \in X : \psi'(u) \neq 0\}.$$

Pela definição do conjunto A, temos que, $A \subset Y$. De fato, por (1.8), temos,

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0, \ \forall u \in A.$$

logo, $\psi'(u) \neq 0$, mostrando que $A \subset Y$. Considerando a aplicação $\rho : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana definida por

$$\rho(u) = \frac{dist(u, \overline{A^c})}{dist(u, \overline{A^c}) + dist(u, B)} \tag{1.9}$$

e notemos que ρ está bem definida. Veja, supondo por absurdo que

$$dist(u, X - A) + dist(u, B) = 0.$$

Então existem, $z_n \in (X - A)$ e $v_n \in B$, tais que

$$z_n \to u, \quad v_n \to u.$$

Segue da definição de A, que

$$\psi(z_n) > c + 2\epsilon \ \text{ ou } \ \psi(z_n) < c - 2\epsilon,$$

então

$$\psi(u) \geq c + 2\epsilon \ \text{ ou } \ \psi(u) \leq c - 2\epsilon.$$

Por outro lado, temos pela definição de B, que

$$c - \epsilon \leq \psi(v_n) \leq c + \epsilon,$$

passando o limite, vem

$$c - \epsilon \leq \psi(u) \leq c + \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portando ρ está bem definida. Temos

$$\rho(u) = 1 \ \text{ em } \ B, \ \rho(u) = 0 \ \text{ em } \ \overline{A^c} \tag{1.10}$$

e notemos ainda pela definição de ρ que,

$$0 \leq \rho(u) \leq 1 \quad \text{em} \quad X. \tag{1.11}$$

Se $f : X \to X$ é uma aplicação definida por,

$$f(u) = \frac{-\rho(u)}{\|V(u)\|} \cdot V(u) \quad \text{se} \quad u \in A \tag{1.12}$$

e

$$f(u) = 0 \quad \text{se} \quad u \in A^c \tag{1.13}$$

temos que f é localmente lipschitziana, (Ver Lema 2). Como $\|f(u)\| \leq 1$ para cada $u \in X$, com isso, o problema de Cauchy, que denotamos por (PC),

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = f(w_1(t)), \quad w_1(0) = u \tag{1.14}$$

possui uma única solução, (Ver [1]), a qual denotaremos por $w(t, u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$. No que segue, considerando a aplicação

$$\eta : [0, 1] \times X \to X,$$

definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u). \tag{1.15}$$

Assim

$$\eta(0, u) = w(0, u) = u \tag{1.16}$$

isto é

$$\eta(0, u) = u \quad \text{quando} \quad t = 0 \tag{1.17}$$

mostrando (i). Seja $u \in A^c$ e defina $w_1(t) = u$. Note que pela definição de f segue,

$$f(w_1(t)) = 0 \Rightarrow w_1'(t) = 0, \quad \text{pois} \quad f(w_1(t)) = w_1'(t)$$

ou ainda, se $u \in A^c$, tem-se $f(u) = 0$. Daí,

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = f(w_1(t)), \quad w_1(0) = u \tag{1.18}$$

logo, pela unicidade da solução do (PC), devemos ter,

$$w_1(t) = w(t,u) = u, \quad \text{para quaisquer} \ \ u \in A^c, \ t \in [0,1],$$

e por consequência,

$$\eta(t,u) = u, \ \forall u \in A^c, \ \forall t \in [0,1].$$

O que mostra (ii). Agora, observe que para $t \geq 0$,

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau$$

assim,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau \right\|$$

e ainda,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\| \, d\tau$$

o que implica pela definição de f,

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \frac{\|\rho(w(\tau,u))\|}{\|V(w(\tau,u))\|} \|V(w(\tau,u))\| \, d\tau$$

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t 1 d\tau = t \tag{1.19}$$

o que mostra que se $u \in S$, então

$$w(t,u) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,\delta]$$

isto é,

$$w(t,S) = \eta(t,S) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,1]. \tag{1.20}$$

Note também que para cada $u \in X$ fixado, a função $t \longmapsto \psi(w(t,u))$ é não-crescente, pois,

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).w'(t,u)$$

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).f(w(t,u))$$

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).\frac{-\rho(w(t,u))V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}$$

e pela definição de campo pseudo-gradiente temos,

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) \leq \frac{-\rho(w(t,u)).\left\|\psi'(w(t,u))\right\|^2}{\|V(w(t,u))\|} \leq 0. \tag{1.21}$$

Seja agora, $u \in (\psi^{c+\epsilon} \cap S)$ temos os dois casos.

Caso (a): Se $\psi(w(\hat{t},u)) < c - \epsilon$ Para algum $\widehat{t} \in [0,\delta)$ tem-se

$$\psi(\eta(1,u)) = \psi(w(\delta,u)) \leq \psi(w(\widehat{t},u)) < c - \epsilon$$

pois, $\psi(w(\cdot,u))$ é decrescente, donde segue,

$$w(\delta,u) \in \psi^{c-\epsilon}.$$

por outro lado de (1.19)

$$\|w(\delta,u) - u\| \leq \delta,$$

assim,

$$w(\delta,u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

segue da definição de η, que

$$\eta(1,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

e portanto

$$\eta(1,\psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

Caso (b): Note que $\forall\ t \in [0,\delta]$, temos

$$\psi(w(t,u)) \leq \psi(w(0,u)) = \psi(u) \leq c + \epsilon$$

o que implica

$$\psi(w(t,u)) \leq c+\epsilon.$$

Supondo que

$$w(t,u) \in B = \psi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_\delta \quad \forall\, t \in [0,\delta],$$

uma vez que

$$\psi(w(\delta,u)) - \psi(u) = \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt,$$

ou seja

$$\psi(w(\delta,u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt,$$

seque da definição (4) e (1.21) que

$$\psi(w(\delta,u)) \leq \psi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt. \tag{1.22}$$

De fato, lembrando que

$$\|V(w(t,u))\|_X \leq 2\,\|\psi'(w(t,u))\|_{X'},$$

daí

$$-\frac{\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}^2}{2\,\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}} \geq -\frac{\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}^2}{\|V(w(t,u))\|_X}$$

agora integrando de 0 a δ, obtemos

$$-\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}dt \leq -\frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

de (1.21) e pelo fato de $\rho \equiv 1$ em B, temos

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq -\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}dt,$$

portanto

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq -\frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

e ainda

$$\psi(w(\delta,u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq \psi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

o que mostra (1.22). Como queríamos demonstrar. De (1.8) e de $\psi(u) \leq c+\epsilon$, e usando (1.22), vem

$$\psi(w(\delta,u)) \leq c+\epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2}.\frac{4\epsilon}{\delta}dt = c+\epsilon - \frac{1}{2}.\frac{4\epsilon}{\delta}\delta = c-\epsilon.$$

Portanto, em qualquer dos casos (a) ou (b), mostramos que

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right) \quad \text{se} \quad u \in \left(\psi^{c+\epsilon} \cap S\right).$$

Mostrando (*iii*). Isto encerra a demostração do **Teorema** 1 **de Deformação**.

■

Lema 2 *A função f da demonstração do Teorema de Deformação* 1, *é localmente Lipschitziana.*

Demonstração: Com efeito,

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v)}{\|V(v)\|}V(v) - \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|}V(u)$$

daí

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v)\,\|V(u)\|\,V(v) - \rho(u)\,\|V(v)\|\,V(u)}{\|V(u)\|\,\|V(v)\|}$$

com isso, somando e subtraindo no numerador da fração acima, $\rho(u)\,\|V(u)\|\,V(v)$ e $\rho(u)\,\|V(v)\|\,V(v)$, obtemos

$$f(u)-f(v) = \frac{1}{\alpha}(\|V(u)\|\,V(v)\,(\rho(v)-\rho(u)) + \rho(u)\,\|V(v)\|\,(V(v)-V(u)) +$$

$$\rho(u)V(v)\,(\|V(u)\| - (V(u)\|)).$$

onde

$$\alpha = \|V(u)\| \|V(v)\|.$$

Logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq |\rho(v) - \rho(u)| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(v) - V(u)\|$$

$$+\frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(u) - V(v)\|.$$

Sendo ρ e V localmente Lipschitzianas, existem $K_1, K_2 > 0$ e z arbitrário tal que $u, v \in U_z$ satisfazendo

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K_1 \|v - u\| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\|$$

$$+\frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\|$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left(K_1 + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2\right) \|v - u\|.$$

Usando a continuidade da função ρ e V, podemos concluir que f é localmente Lipschitziana.

■

Seja X um espaço de Banach e $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Definição 6 *Dizemos que $(u_n) \subset X$, é uma sequência **Palais-Smale-(PS)**, no nível c, denotada por $(PS)_c$ quando*

$$\psi(u_n) \to c \quad e \quad \psi'(u_n) \to 0.$$

Definição 7 *Dizemos que ψ, verifica a condição de (PS), quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X, isto é,*

$$\psi(u_n) \to c \quad e \quad \psi'(u_n) \to 0,$$

existem $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_k} \to u_0 \quad em \quad X.$$

Teorema 2 *(**Teorema de Deformação**): Suponha que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (**PS**). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ψ então, para todo ϵ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que (para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$) :*

i) $\eta(0, u) = u$,

ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$.

Demonstração: Uma vez que por hipótese c não é valor critico de ψ, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que,

$$\text{se} \;\; u \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \Rightarrow \|\psi'(u)\| \geq \beta,$$

pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u_{\alpha,\beta} \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \quad \text{com} \quad \|\psi'(u_{\alpha,\beta})\| < \beta.$$

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2n}, \;\; \beta = \frac{1}{n} \;\; \text{e} \;\; u_n = u_{\alpha_n, \beta_n},$$

temos

$$c - \frac{1}{n} \leq \psi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|\psi'(u_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Daí

$$\psi(u_n) \longrightarrow c \ \text{ e } \ \psi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Como ψ verifica a condição (**PS**), existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos

$$\psi(u_{n_k}) \longrightarrow \psi(u) \ \text{ e } \ \psi'(u_{n_k}) \longrightarrow \psi'(u),$$

portanto, pela unicidade do limite segue

$$\psi(u) = c \ \text{ e } \ \psi'(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ψ, contradizendo a hipótese. Daí, usando o Teorema 1 de Deformação, com $X = S$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$, concluímos a demonstração do Teorema 2 de Deformação.

■

Capítulo 2

Teorema de Ambrosetti-Rabinowitz

2.1 Teorema do Passo da Montanha

Vamos agora apresentar uma primeira ilustração do método minimax, a qual tem provado ser uma ferramenta poderosa na abordagem de muitos problemas não-lineares em equações diferenciais, o chamado Teorema do **Passo da Montanha** de **Ambrosetti** e **Rabinowitz**.

Teorema 3 ***(Teorema do Passo da Montanha):*** *Seja X um espaço de Banach e seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de* ***Palais-Smale (PS)*** *[ou $(PS)_c$]. Suponha que, se*

$$e \in X \quad e \quad 0 < r < \|e\| \tag{2.1}$$

são tais que

$$a \equiv \max\{\psi(0), \psi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \psi(u) \equiv b, \tag{2.2}$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{2.3}$$

é um valor crítico de ψ com $c \geq b$. Onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \text{ } tal \text{ } que \text{ } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

é a classe de caminhos ligando 0 *a* e.

Demonstração:

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{2.4}$$

Afirmamos que c está bem definido. pois, sendo $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $\psi \circ \gamma$ é uma aplicação contínua, e sendo $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $\psi \circ \gamma$ possui em $[0,1]$, um máximo, e por isso trocamos o supremo por máximo em (2.3) pois, como $\gamma([0,1])$ é compacto em X, então $\psi(\gamma(t))$ também é compacto. Notemos que,

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_r \neq \emptyset \tag{2.5}$$

para qualquer $\gamma \in \Gamma$, pois $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$ e $0 < r < \|e\|$ por hipótese. Portanto,

$$\max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B_r} \psi, \quad \text{pois,}$$

pela definição de b, temos

$$b \leq \psi(u), \ \forall \ u \in X; \ \|u\| = r.$$

considerando a função

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{2.6}$$

definida por,

$$t \to g(t) = \|\gamma(t)\| \ \ \forall t \in [0,1] \tag{2.7}$$

seque-se que g é contínua, note que:

$$g(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0, \quad g(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > r \tag{2.8}$$

isto é, $g(0) < r < g(1)$, então pelo teorema do valor intermediário existe t_0 em $(0,1)$ tal que,

$$g(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = r.$$

logo existe $u_0 = \gamma(t_0) \in X$, tal que $\|u_0\| = r$, assim, $b \leq \psi(u_0)$ e

$$\psi(u_0) = \psi(\gamma(t_0)) \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

implicando que

$$b \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrários, temos

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Agora suponha que c não é um valor crítico de ψ. Então pelo **Teorema 2 de Deformação**, para,

$$0 < \epsilon < \frac{(b-a)}{2}, \quad \text{existe} \quad \eta \in C([0,1] \times X, X) \tag{2.9}$$

tal que,

ii) $\eta(t,u) = u \ se \ u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$,

Agora, pela definição de c, como um ínfimo sobre Γ, podemos escolher um $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que,

$$c < \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma_0(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.10}$$

Considere o caminho $\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Por (ii) e pelo fato que $2\epsilon < b - a$, segue-se que $\hat{\gamma} \in \Gamma$, pois,

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1,0) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(1) = \eta(1,e) = e \tag{2.11}$$

uma vez que

$$\psi(0), \psi(e) \leq a < b - 2\epsilon. \tag{2.12}$$

De (2.10) seque,

$$\gamma_0(t) \in \psi^{c+\epsilon} \tag{2.13}$$

De (iii) e (2.13) temos,

$$\hat{\gamma}_0(t) = \eta(1, \gamma_0(t)) \in \psi^{c-\epsilon}, \ \forall t \in [0,1],$$

ou seja

$$\psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon, \ \forall t \in [0,1],$$

logo

$$\max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)),$$

temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon$$

então

$$c \leq c - \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico de ψ. Isto encerra a demonstração do Teorema 3 do Passo da Montanha .

■

Capítulo 3

Teorema do Ponto de Sela

3.1 Alguns resultados do Grau topológico

Apresentaremos aqui apenas alguns resultados do grau topológico para usarmos na demonstração do teorema seguinte, o leitor interessado em mais resultados deverá ver em [3]

Definição 8 *Sejam* $f \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ *e* $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. *Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação* f *em relação a* Ω *no ponto* b, *como sendo o número inteiro*

$$deg\,(f, \Omega, b) = \sum_{x_i \in f^{-1}(\{b\})} sgn\,(J_f\,(x_i))$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & se \;\; t > 0 \\ -1, & se \;\; t < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

A prova dos resultados a seguir pode ser vista em [3]. Aqui nosso interesse é apenas usar alguns resultados do grau topológico para provar o teorema do ponto de sela, e o teorema to passo da montanha generalizado.

Normalização. Se $id : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é a aplicação identidade, então

$$deg(id, U, b) = 1 \;\; se\ b \in U \;\; \text{e} \;\; deg(id, U, b) = 0 \;\; se\ b \notin U \tag{3.2}$$

Proposição 1 *(**Dependência na fronteira.**) Sejam $\psi,\ \phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$. Se $\psi \equiv \phi$ em ∂U, então $deg(\phi, U, b) = deg(\psi, U, b)$*

Proposição 2 *(**Existência de Solução**): Se $deg(\phi, \Omega, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$\phi(x_0) = b$$

3.2 O Teorema do Ponto de Sela

Definição 9 *Se D é uma vizinhança de 0 em X; a classe de deformação de $\overline{D}$ em X que fixa ∂D, denotada por Γ, e definida como segue*

$$\Gamma = \left\{ h \in C\left(\overline{D}, X\right);\ h(u) = u, \quad \forall u \in \partial D \right\}$$

Teorema 4 *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, com $V \neq \{0\}$ e $dim(V) < \infty$, e seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição Palais-Smale-(PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que*

$$a = \max_{\partial D} \psi < \inf_{W} \psi = b,$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \psi(h(u))$$

é um valor crítico de ψ com $c \geq b$.

Demonstração: O primeiro passo da demonstração é verificar que

$$h(D) \cap W \neq \emptyset$$

para todo $h \in \Gamma$. Com efeito, defina

$$P : X \longrightarrow V$$

com $P(x) = x_1$, onde $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in V$, isto é, P é a projeção de X sobre V. Dessa forma

$$Ph \in C\left(\overline{D}, V\right)$$

e

$$Ph = Pu = u \neq 0,$$

para todo $u \in \partial D$.

Com isso, uma vez que podemos Identificar V com o $\mathbb{R}^N$, temos que o Grau topológico de Brouwer $deg\,(Ph, D, 0)$, está bem definido e pelas propriedades do grau topológico, segue

$$deg\,(Ph, D, 0) = deg\,(Id, D, 0) = 1.$$

Dessa forma, existe $u_0 \in D$ tal que

$$Ph(u_0) = 0,$$

isto é,

$$h(u_0) \in W,$$

dai concluímos que

$$h(D) \cap W \neq \emptyset.$$

Agora, sendo

$$b = \inf_W \psi = \inf\{\psi(w);\ w \in W\}$$

e $h(u_0) \in W$,

$$b \leq \psi\left(h(u_0)\right)$$

de onde temos

$$b \leq \psi\left(h(u_0)\right) \leq \max_{u \in \overline{D}} \psi\left(h(u)\right)$$

para todo $h \in \Gamma$. Portando, pela definição de ínfimo, concluímos que $c \geq b$

Vamos agora para a segunda parte da demonstração do teorema. Para isso, suponhamos por contradição que c não é um valor crítico para ψ. Então, pelo teorema de Deformação segue que dado

$$0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$$

existe η com

$$\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$$

tal que

$$\eta(t,u) = u \quad \text{se} \;\; u \notin \psi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right),$$

para todo $t \in [0,1]$ e

$$\eta\left(1, \psi^{c+\epsilon}\right) \subset \psi^{c-\epsilon}.$$

Considerando agora, $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \overline{D}} \psi\left(h(u)\right) \leq c + \epsilon$$

e definamos

$$\widehat{h}(u) = \eta\left(1, h(u)\right).$$

Sendo

$$2\epsilon < b - a,$$

ou seja,

$$a < b - 2\epsilon,$$

temos que

$$\psi(u) \leq \max_{u \in \partial D} \psi(u) = a,$$

então

$$\psi(u) < b - 2\epsilon \leq c - 2\epsilon, \quad \forall\; u \in \partial D,$$

e Portanto, temos

$$\psi(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon] \quad \forall\; u \in \partial D,$$

ou seja,

$$u \notin \psi^{-1}\left([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\right).$$

Pela definição de η,

$$\widehat{h}(u) = \eta\left(1, h(u)\right) = \eta\left(1, u\right) = u,$$

para todo $u \in \partial D$, donde concluímos que $\widehat{h} \in \Gamma$. E por fim,

$$\psi\left(h(u)\right) \leq \max_{u \in \overline{D}} \psi\left(h(u)\right) \leq c + \epsilon,$$

dai

$$\eta\left(1, h(u)\right) = \widehat{h}(u) \in \psi^{c-\epsilon},$$

para todo $u \in \overline{D}$, isto é,

$$\max_{u \in \overline{D}} \psi\left(\widehat{h}(u)\right) \leq c - \epsilon.$$

Sendo

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \psi\left(h(u)\right), \quad \forall\; h \in \Gamma,$$

obtemos que,

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \psi\left(\widehat{h}(u)\right) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Provando assim que c é um valor crítico para ψ.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Uma Generalização do Teorema do Passo da Montanha

4.1 Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Teorema 5 ***Teorema do Passo da Montanha Generalizado:*** *Seja $E = V \oplus X$ um espaço de Banach real, onde $dimV < +\infty$. Considere $\psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de* ***Palais-Smale-(PS)*** *e as seguintes condições :*

- ψ_1*: Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$\psi_{|\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha, \; e$$

- ψ_2*: Existe $e \in (\partial B_1 \cap X)$ e $R > \rho$ tais que, se $Q \equiv \{B_R \cap V\} \oplus \{re;\; 0 < r < R\}$, então*

$$\psi_{|\partial Q} \leq 0.$$

Então, ψ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \psi(h(u)),$$

onde $\Gamma = \left\{ h \in C(\overline{Q}, E);\ h = id \text{ em } \partial Q \right\}$.

Demonstração: Provaremos apenas que c está bem definido, pois é onde se usa a teoria do grau, o restante é análoga do passo da montanha normal. Note $\psi \circ h$ possui máximo em $\overline{Q}$. **Afirmação 1:** Se $h \in \Gamma$, então

$$h(Q) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset, \tag{4.1}$$

pois, se P denota a projeção de E sobre V, então (1) é equivalente a

$$Ph(u) = 0, \quad \|(id - P)h(u)\| = \rho \tag{4.2}$$

para algum $u \in Q$. Se $u \in \overline{Q}$, então $u = v + re$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 \leq r \leq R$. defina

$$\phi(r, v) = \left(\|(id - P)h(v + re)\|, Ph(v + re)\right).$$

Notando que $\phi \in C(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$, e sendo $h = id$ para $u \in \partial Q$, tem-se

$$\phi(r, v) = \left(\|(id - P)(v + re)\|, P(v + re)\right).$$

Organizado, temos

$$\phi(r, v) = (|r| \, \|e\|, v),$$

e como $e \in \partial B_1 \cap X$, obtemos

$$\phi(r, v) = (r, v), \quad \forall\ u \in \partial Q,$$

isto é, $\phi = id$ em ∂Q. Em particular, de (ψ_2) temos $\phi(r,v) \neq (\rho,0)$ para $u \in \partial Q$ e $(\rho,0) \in Q$. Veja, sendo $0 < \rho < R$, temos que $(\rho,0) \notin \partial Q$, pois se estivesse, deveríamos ter

$$\rho = 0 \quad ou \quad \rho = R,$$

o que não acontece. Por outro lado, sendo $0 \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 < \rho < R$, daí $(\rho,0) \in Q$. Identificando $\mathbb{R} \times V$ com $\mathbb{R}^N$, tem se que o grau de Brouwer está bem definido, e palas propriedades do grau topológico obtemos

$$deg(\phi, Q, (\rho,0)) = deg(id, Q, (\rho,0)) = 1.$$

logo existe $u \in Q$ tal que $\phi(u) = (\rho,0)$, ou seja

$$(\|(id-P)h(u)\|, Ph(u)) = (\rho,0),$$

o que implica

$$Ph(u) = 0, \quad \|(id-P)h(u)\| = \rho \tag{4.3}$$

mostrando assim a afirmação 1. Pela afirmação 1, temos que existe $u \in Q$ tal que $h(u) \in \partial B_\rho \cap X$. Da condição (ψ_1), segue que $\psi(h(u)) \geq \alpha$, o que implica

$$H = \left\{ max_{u \in \overline{Q}} \left\{ \psi(h(u)) \right\} \geq \alpha \ \ \forall \ h \in \Gamma. \right\}$$

ou seja o conjunto H é limitado inferiormente, logo existe um ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, c está bem definido. O restante da demonstração é análoga a do Teorema (3) do passo da montanha, usando o teorema de Deformação.

■

Capítulo 5

Conclusão

Em suma, o leito que compreendeu bem todos os teoremas aqui desenvolvidos, terá ferramentas poderosas para a caminhada em um mundo não linear, em equações elípticas não lineares. Uma vez que tais teorema do tipo Minimax, são de uma matemática moderna, atual, que ainda tem muito a ser feito.

Bibliografia

[1] Lima,Elon Lages .**Espaços Métricos**.4. ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides,IMPA 2005.

[2] Poul.H.Rabinowitz. **Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations**. University of Miami, 1984.

[3] COSTA, David Goldstein. **Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais**. CNPq-IMPA, 1986.

[4] Haim.Brezis, **Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, University Rutgers, 2010.

[5] M. Willem. , **Minimax Theorems**, Boston: Birkhauser, 1996.

[6] A. Ambrosetti, G. Prodi. , **A Primer of Nonlinear Analysis**. Department of Mathematics, University of Pisa, 1993.

Teoremas do Tipo Minimax

Neste livro é feita a apresentação e demonstração de alguns teoremas do tipo Minimax, quem tem provado ser grandes ferramentas da matemática atual, entre eles temos, o teorema do ponto de sela, teorema do passo da montanha, e por fim uma generalização do passo da montanha, em que são aplicações do grau topológico.

José Pastana de Oliveira Neto

RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
WhatsApp: 91 98885-7730
CNPJ: 39.242.488/0001-07
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

9 786558 896036 >