INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS

JOSÉ PASTANA DE OLIVEIRA NETO
WELBER AIRES DE OLIVEIRA

Rfb Editora

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

Equipe RFB Editora

José Pastana de Oliveira Neto
Welber Aires de Oliveira

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS

1ª Edição

Belém-PA
RFB Editora
2023

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
91 98885-7730
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA,
CEP 66035065

Editor-Chefe
Prof. Dr. Ednilson Souza
Diagramação e capa
Autores
Bibliotecária
Janaina Karina Alves Trigo Ramos

Produtor editorial
Nazareno Da Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I61

Introdução às equações elípticas / José Pastana de Oliveira Neto –Belém: rfb, 2023.
Outros
Welber Aires de Oliveira

16 x 23 cm
Livro em pdf.

ISBN 978-65-5889-607-4
DOI 10.46898/rfb.759dad8f-3323-4310-88fa-2da0f1aea93f

1. Matemática. I. Oliveira Neto, José Pastana de II. Título.

CDD 510

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática.

Prefácio

Sobre o Livro

Neste livro é feita uma introdução para o estudo de equações elípticas não lineares, o qual são apresentados alguns resultados sobre espaços de Banach e Hilbert e introduzido o método variacional via Teorema de Ambrosetti-Rabinowitz.

Sumário

Capítulo 1

Espaços Normados e Espaços de Banach

1.1 Espaços Normados e Espaços de Banach

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados e definições de fundamental importância na Análise Funcional. A princípio, serão vistos conceitos como: definição de espaço métrico completo, de espaço normado e espaço de Banach, e também alguns exemplos. Posteriormente, serão abordadas algumas propriedades dos Espaços métricos e definições de operadores lineares, funcionais lineares e algumas peculiaridades dos mesmos assim como alguns exemplos. Colocamos também a definição de espaço normado de operadores. O espaço Dual.

Definição 1. *Um espaço métrico X é completo se toda sequência de Cauchy de X converge em X.*

Definição 2. *Um espaço normado X é um espaço vetorial real com uma norma definida sobre ele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo(completo na métrica induzida pela norma). Aqui uma norma num* *espaço vetorial X é uma função* $|.| : X \to \mathbb{R}$ *definida em X a valores reais* $||x||$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

N1) $||x|| \geq 0$*;*

N2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

N3) $||\alpha x|| = |\alpha| \, . \, ||x||$*;*

N4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$*;* *(Desigualdade Triangular)*

Aqui x e y são vetores arbitrários em X e α um escalar qualquer .

Uma norma em X define uma métrica d em X (definição (5.1) do Apêndice) que é dado por

$$d(x, y) = ||x - y|| \, . \tag{1.1}$$

Com efeito

- $d(x,\ y) = ||x - y|| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
- $d(x,\ y) = ||x - y|| > 0$, o que verifica-se, pois uma norma é sempre positiva para $x \neq y$;
- $d(x,\ y) = ||x - y|| = ||(-1).(y - x)|| = |-1|. \, ||y - x|| = ||y - x|| = d(y, x)$;
- $d(x,\ y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$;

e é chamado a métrica induzida pela norma.Iremos representar um espaço normado como sendo $(X, ||.||)$ ou simplesmente por X ao longo do trabalho.

Os espaços normados dos exemplos seguintes estão definidos no Apêndice

.

1.1.1 Completeza do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Seja $X = \mathbb{R}^n$, onde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ com a norma euclidiana definida por

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

$\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma $\|x\|_1$.

Demonstração. Consideremos uma sequência arbitrária de Cauchy (x_m) em $\mathbb{R}^n$ de modo que para cada $m \in \mathbb{N}$ teremos $x_m = (\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \in R^n$. Como (x_m) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right|^2 \right)^{1/2} < \epsilon \tag{1.3}$$

com $m, r > n_0$.

Elevando ao quadrado temos

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \epsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2} < \sqrt{\epsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right| < \epsilon.$$

Isto mostra que para cada j fixo, $(1 \leq j \leq n)$, a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo é convergente pelo teorema (5.1) do Apêndice, digamos, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses n limites definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ assim temos que

$$(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}) \to (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

onde claramente x por ter n coordenadas pertencerá a $\mathbb{R}^n$. De (1.3) com $r \to \infty$ temos

$$d(x_m, x) \leq \epsilon \tag{1.4}$$

com $m > n_0$.

Isso mostra que x é limite de (x_m) provando a completeza de $\mathbb{R}^n$.

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

$\square$

1.1.2 Completeza do espaço l^p

O espaço l^p, com p fixo e $1 \leq p < +\infty$, é completo com norma

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j \right|^p \right)^{1/p}$$

Demonstração. Seja (x_n) um sequência arbitrária de Cauchy no espaço l^p, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p \right)^{1/p} < \epsilon \tag{1.5}$$

segue-se que para todo $j = 1, 2, ...$ temos

$$\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right| < \epsilon \tag{1.6}$$

com $m, n > n_0$.

Escolhendo um j fixo. De (1.6) vemos que $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é um sequência de Cauchy de números reais. Logo, é convergente pelo teorema (5.1), digamos que $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esta infinidades de limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

De (1.5) temos para todo $m, n > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p < \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Considerando $n \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Considerando $k \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \epsilon^p \tag{1.7}$$

Isto mostra que

$$x_m - x = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$$

Desde que $x_m \in l^p$, segue da desigualdade de Minkowski (5.7), que

$$\left(\sum |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_m|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |x - x_m|^p\right)^{1/p}$$

onde

$$\left(\sum |x_m|^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{e} \quad \left(\sum |x - x_m|^p\right)^{1/p} < \infty$$

logo,

$$\left(\sum |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

ou seja,

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

Portanto l^p é um espaço de Banach.

□

1.1.3 Completeza do espaço l^∞

O espaço l^∞ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$||x|| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j\right|$$

Demonstração. Seja (x_m) uma sequência de Cauchy arbitrária no espaço l^∞ onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$.Onde a métrica é dada por

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j - \eta_j\right|$$

e $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in l^\infty$, daí para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) = ||x_m - y_n|| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}\right| < \epsilon.$$

Para cada j fixo,

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \epsilon \tag{1.8}$$

com $(m, n > n_0)$.

Portanto,a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo, converge pelo teorema (5.1) do Apêndice,assim, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando a infinidade de limites $\xi_1, \xi_2, ...$, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^\infty$ e $x_m \to x$.

De (1.8), quando $n \to \infty$ temos,

$$\xi_j^{(n)} \to \xi_j \quad \Rightarrow \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon \tag{1.9}$$

com $m > n_0$.

Uma vez que $x_m \in l^\infty$, existe um número real k_m tal que $\left|\xi_j^m\right| \leq k_m$ qualquer que seja j. Daí, pela desigualdade triangular, temos

$$\left|\xi_j\right| = \left|\xi_j - \xi_j^{(m)} + \xi_j^{(m)}\right| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right|$$

com $m > n_0$.

Sabemos que

$$\left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| = \left|(-1).(\xi_j^{(m)} - \xi_j)\right| = \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|$$

Desta forma de (1.9)

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right| \leq \epsilon + k_m$$

com $m > n_0$. Esta desigualdade vale para todo j. Assim (ξ_j) é uma sequência limitada de números reais. Isto Implica que $x = (\xi_j) \in l^\infty$. Também, de (1.9) obtemos

$$d(x_m, x) = ||x_m - x|| = \sup_j \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon$$

com $m > n_0$. O que mostra que $x_m \to x$.

Portanto, l^∞ é um espaço de Banach.

$\square$

1.1.4 Completeza do espaço $C[a, b]$

O espaço $C[a, b]$ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$||\psi|| = \max_{t \in J} |\psi(t)| \tag{1.10}$$

onde $J = [a, b] \subset R$ com $t \in [a, b]$.

Demonstração. Seja (ψ_m) uma sequência arbitraria de Cauchy em $C[a, b]$.Assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um n_0, tal que para todos $m, n > n_0$, temos

$$d(\psi_m, \psi_n) = \max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi_n(t)| < \epsilon \tag{1.11}$$

com $t \in [a, b]$. Daí com qualquer t fixo, $t = t_0 \in J$, temos

$$|\psi_m(t_0) - \psi_n(t_0)| < \epsilon \tag{1.12}$$

com $(m, n > n_0)$. Isto mostra que $(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), ...)$ é uma sequência de Cauchy em R. Daí a sequência converge pelo Teorema (5.1) do apêndice, digamos $\psi_m(t_0) \to \psi(t_0)$, se $m \to \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $\psi(t)$. Isto define uma convergência pontual da função ψ em J. Vamos mostrar agora que $\psi \in C[a, b]$ e que $\psi_m \to \psi$.

Fazendo $n \to \infty$ em (1.11), obtemos

$$\max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi(t)| \leq \epsilon \tag{1.13}$$

Com $(m > n_0)$ e $t \in J$.

$$|\psi_m(t) - \psi(t)| \leq \epsilon \tag{1.14}$$

com $m > n_0$.

De (1.14) vemos que $\psi_m \to \psi$ uniformemente.Como as ψ_m são contínuas em J,o teorema (20) do Apêndice garante a continuidade de ψ para todo $t \in J$,daí $\psi \in C[a, b]$. Portanto $C[a, b]$ é um espaço de Banach.

□

1.1.5 Exemplo de espaço incompleto

O espaço normado $C[a, b]$ com

$$||u||_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |u(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \quad \forall u \in C[a, b]$$

não é um espaço de Banach.

Demonstração. Para facilitar suponhamos $a = 0$ e $b = 1$, e consideremos a sequência de funções $f_n \in C[a, b]$ $(n \geq 2)$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \dfrac{-n}{2} x + \dfrac{n+2}{4} & , \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Afirmação:(f_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > o$,considere o gráfico

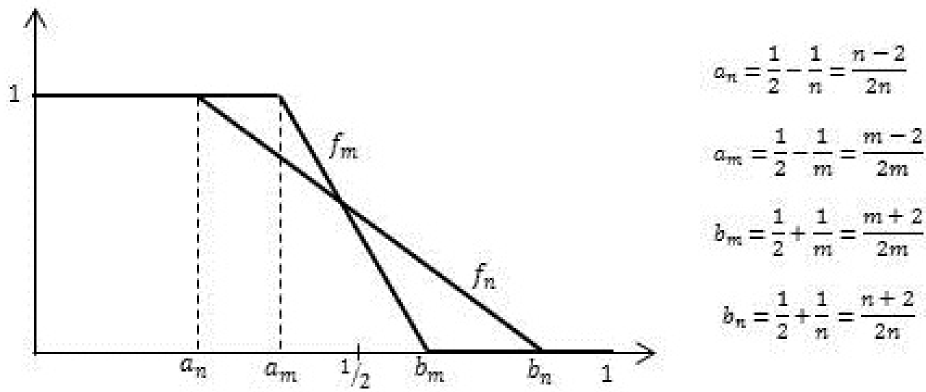

Figura 1.1:

Temos

$$||f_n - f_m||_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^{a_n} |1-1|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_{a_n}^{a_m} |f_n(t) - 1|^p\, dt\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_{a_m}^{b_m} |f_n(t) - f_m(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_{b_m}^{b_n} |f_n(t) - 0|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_{b_n}^{1} |0-0|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Notemos que $0 \leq f_k(t) \leq 1, \forall k$ .Logo $-1 \leq f_k(t) - 1 \leq 0 < 1$

$$\Rightarrow |f_k(t) - 1| \leq 1\ |f_n(t) - f_m(t)| \leq 1;$$

Daí,usando o Corolário (2) do Apêndice

$$||f_n - f_m||_{L^p([0,1])} \leq 0 + \left(\frac{m-2}{2m} - \frac{n-2}{2n}\right)^{1/p} + \left(\frac{m+2}{2m} - \frac{m-2}{2m}\right)^{1/p} + \left(\frac{n+2}{2n} - \frac{m-2}{2m}\right)^{1/p} + 0$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^{1/p} + \left(\frac{2}{m}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^{1/p} \to 0$$

quando $m, n \to \infty$ portanto (f_n) é de Cauchy. Se $m = n + 1$, na espressão acima,então $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^p[0,1]} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmação: A sequência (f_n) acima, não converge em $C[a, b]$. De fato,suponhamos que exista $f \in C[0, 1]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p([0,1])} = 0.$$

Neste caso temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p\, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^1 |f_n(t) - f(t)|^p\, dt.$$

Daí,sendo $\int_a^b |g(t)|^p\, dt \geq 0$,temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p\, dt = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^1 |f_n(t) - f(t)|^p\, dt.$$

Por outro lado,sendo $f_n(t) = 1$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$,temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |1 - f(t)|^p\, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - 1|^p\, dt.$$

Pois

$$0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p\, dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} (|f(t)| - |f_n(t)|)^p\, dt$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq t\leq\frac{1}{2}} |f(t)| + 1 \right)^p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \to 0.$$

Sendo f contínua ,$f \equiv 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$.Analogamente,usando

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(t) - f(t)|^p\, dt.$$

Concluimos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|^p\, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(t)|^p\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\frac{1}{2}\leq t\leq 1}|f(t)|+0\right)^p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)+\int_{1/2}^{1}|f(t)|^p\,dt.$$

Logo $f\equiv 0$ em $[\frac{1}{2},1]$ e f não é contínua em $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,\text{se } \ 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 0 & ,\text{se } \ \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

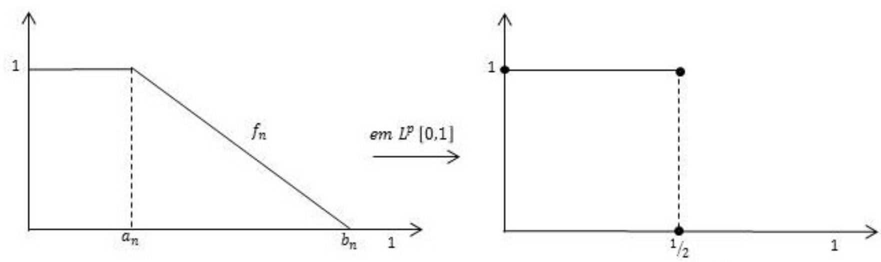

Figura 1.2:

Portanto ,C[a,b] não é um espaço completo com $\|f\|_{L^p[a,b]}$.

□

1.2 Propriedades Adicionais de Espaços Métricos

Por definição, um subespaço Y de um espaço normado X é um subespaço de X considerado como um espaço vetorial, com a norma obtida através da restrição da norma em X para o subespaço Y. Esta norma em Y é dita ser induzida pela norma em X. Se Y é fechado em X, então Y é chamado subespaço fechado em X.

Por definição, um subespaço Y de um espaço de Banach X, é um subespaço de X. Considerado como um espaço normado. Daí, Y não necessita ser completo.

Teorema 1. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Se Y é fechado então $Y = \overline{Y}$, logo, seja $a \in \overline{Y}$ então $a \in Y$. Daí, $a = \lim x_n$ onde a sequência (x_n) está em Y.Logo a sequência (x_n) é de Cauchy pelo teorema (5.1) do apêndice e portanto Y é um espaço de Banach. Reciprocamente,suponha que Y é Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em Y tal que $x_n \to x \in X$.Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y, e portanto convergente pois Y é completo por hipótese.Existe então $y \in Y$ tal que $x_n \to y$.Da unicidade do limite temos $x = y \in Y$, provando que Y é fechado em X.

□

Definição 3. ***(Base de Schalder)*** *Se um espaço normado X contem uma sequência (e_n) tal que para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares (α_n) tal que*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)\| \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty \tag{1.15}$$

então (e_n) é chamada uma Base de Schalder para X.As séries $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ que tem a soma x é então chamada de espansão de x em relação a (e_n) e escrevemos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

1.3 Operadores lineares

Definição 4. *Um operador linear entre espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : D(T) \subset X \to Y$, em que seu domínio $D(T)$ é um subespaço vetorial e é satisfeita a condição*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y), \quad \forall \quad x, y \in D(T) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.3.1 Exemplos de operadores lineares

Exemplo 1. *O operador identidade* $I_X : X \to X$ *é definido por* $I_X x = x$ $\forall x \in X$.

Basta notar que

$$T(x + \alpha y) = x + \alpha y = Tx + \alpha Ty \;\; \forall\, x,\; y \in X \; e \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2. *O operador zero* $0 : X \to Y$ *é definido por* $0x = 0 \quad \forall x \in X$.

de fato,

$$T(x + \alpha y) = 0(x + \alpha y) = 0 = 0x + \alpha 0y \quad \forall\, x,\; y \in X \; e \; \alpha \in R.$$

Exemplo 3. *Diferenciação: Seja* X *o espaço vetorial de todos os polinômios sobre* $[a, b]$*. Podemos definir um operador linear* T *em* X *por*

$$Tx(t) = x'(t)$$

para cada $x \in X$*, onde denota a diferenciação em relação a* t*. O operador* T *é aplicado de* X *em* X*.*

Com efeito

$$T(x + \alpha y) = x' + \alpha y' = Tx + \alpha Ty \quad \forall\, x,\; y \in X \; e \; \alpha \in R.$$

Exemplo 4. *Integração: Um operador linear* $T : C[a, b] \to C[a, b]$ *, é definido por*

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau$$

onde $t \in [a, b]$.

De fato

$$T(x+\alpha y) = \int_a^t (x+\alpha y)d\tau = \int_a^t x d\tau+\alpha \int_a^t y d\tau = Tx+\alpha Ty \;\; \forall\, x,\; y \in X \; e \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.4 Operadores lineares limitados

Definição 5. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito ser limitado se existe um número real c tal que*

$$||Tx|| \leq c\,||x|| \quad \forall \quad x \in D(T).$$

Vamos denotar por $||T||$ o seguinte número real associado ao operador linear limitado T:

$$||T|| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Tx|| \tag{1.16}$$

Note que a desigualdade abaixo

$$||Tx|| \leq ||T||\,||x|| \quad \forall x \in D(T) \tag{1.17}$$

é válida. De fato,

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||}$$

De (1.16)

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq ||T||$$

logo

$$||Tx|| \leq ||T||\,||x||$$

com isso verifica-se a desigualdade (1.17).

1.4.1 Exemplo de operador limitado

Exemplo 5. *Seja* $E = C([0,1];\mathbb{R})$ *com*

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

tal que

$$T : E \to \mathbb{R}; \quad \forall f \in E \quad temos \quad T(f) = f(1) \tag{1.18}$$

Note que o operador T é limitado.

Demonstração. Se $f \in E$ e $\|f\| = 1$, temos

$$|f(1)| \leq \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|.$$

Desta forma,

$$|T(f)| \leq 1$$

assim

$$\frac{|T(f)|}{\|f\|} \leq 1 \quad \forall f \in E - \{0\}$$

isto é,

$$|T(f)| \leq \|f\| \quad \forall f \in E$$

isto prova a limitação do operador.

□

Teorema 2. *(Dimensão Finita) Se um espaço normado X é de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Demonstração. Seja X um espaço normado tal que $dim\ X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para X (definição (23) Apêndice). Considerando qualquer $x = \sum \xi_j e_j$ (definição (23) Apêndice), e qualquer operador T em X. De modo que T seja linear, segue-se que:

$$||Tx|| = \left\|T \sum \xi_j e_j\right\| = \left\|\sum \xi_j T e_j\right\| \leq \sum \left|\xi_j\right| \left\|T e_j\right\|.$$

Como $1 \leq j \leq n$ daí

$$\sum \left|\xi_j\right| \left\|T e_j\right\| = |\xi_1|||T e_1|| + ... + |\xi_n|||T e_n||$$

e considerado $max \left\|T e_j\right\|$, teremos

$$\sum \left|\xi_j\right|\left\|T e_j\right\| \leq \max_k \left\|T e_j\right\| \sum \left|\xi_j\right| \tag{1.19}$$

Em $\sum \left|\xi_j\right|$, sabemos da desigualdade (5.8) do Apêndice que

$$||\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n|| \geq c(|\xi_1| + ... + |\xi_n|)$$

onde $c > 0$. Isto é,

$$||x|| = \left\|\sum \xi_j e_j\right\| \geq c \sum \left|\xi_j\right|$$

assim,

$$\frac{||x||}{c} \geq \sum \left|\xi_j\right|.$$

Daí, de (1.19), obtemos

$$||Tx|| \leq \gamma\, ||x||$$

com $\gamma = \frac{1}{c} \max_k \left\|T e_j\right\|$ logo $\gamma > 0$

Portanto, T é limitado.

□

Operadores são aplicações, daí, aplica-se a definição de continuidade. Isto é fundamental para operadores lineares. Continuidade e limitação tornam-se conceitos equivalentes.

Os detalhes são os que seguem:

Definição 6. *Seja $T : D(T) \to Y$ um operador, não necessariamente linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados. Por definição, o operador T é contínuo em $x_0 \in D(T)$ se para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \text{ para todo } x \in D(T) \text{ satisfazendo } \|x - x_0\| < \delta.$$

T é contínuo, se T é contínuo em cada $x \in D(T)$.

Teorema 3. ***(Continuidade e limitação)*** *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear e X, Y espaços normados. Então*

a) *T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

b) *Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. Se T é limitado, existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in D(T)$$

logo,

$$\|Tx - Ty\| \leq c\,\|x - y\|$$

Isto mostra que T é lipschitziana, daí T é contínua. Vamos provar agora que se T é contínua em um ponto digamos em x_0, então T é limitada.

Seja $x_0 \in D(T)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \quad \forall x \in D(T),\ satisfazendo\ \|x - x_0\| < \delta$$

$\forall x \in D(T)$

Considerando $x_y = x_0 + \delta \frac{y}{2} \|y\| \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$, segue-se que

$$x_y - x_0 = \delta \frac{y}{2\|y\|} \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$$

e aplicando o operador, e depois a norma, obtemos

$$\left\|Tx_y - Tx_0\right\| = \left\|\frac{\delta}{2\|y\|} Ty\right\| < \epsilon$$

pois

$$\left\|x_y - x_0\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

e portanto,

$$\|Ty\| < \frac{2\epsilon}{\delta} \|y\| = M \|y\| \quad \forall y \in D(T),$$

onde $M = 2\epsilon/\delta > 0$,

com isso provamos a limitação de T. Se T é contínuo em um ponto então T é limitado, como já provamos, portanto T é continuo pelo primeiro item de deste teorema (3). Isto conclui a demonstração do teorema.

□

Corolário 1. ***(Continuidade e Espaço Nulo)*** *Seja T um operador linear limitado. Então:*

a) $x_n \to x$ *implica* $T(x_n) \to T(x)$*, onde* $x_n, x \in D(T)$.

b) *O espaço nulo $N(T)$ é fechado.*

Demonstração. a) Como T é linear e limitado, de (1.17),

$$||Tx_n - Tx|| = ||T(x_n - x)|| \leq ||T||\,||x_n - x||$$

Daí quando $n \to \infty$, $\quad ||x_n - x|| \to 0$.

Logo,

$$||Tx_n - Tx|| \to 0$$

Isto é

$$T(x_n) \to T(x).$$

b) Para cada $x \in \overline{N(T)}$ existe uma sequência x_n em $N(T)$ tal que $x_n \to x$. Assim, $Tx_n \to Tx$ pelo primeiro item do corolário (1).Como $Tx_n = 0$,também $Tx = 0$, daí $x \in N(T)$.

Então,como $x \in \overline{N(T)}$ é arbitrário, $N(T)$ é fechado.

□

1.5 Funcionais Lineares

Um funcional é um operador cuja imagem encontra-se na reta real $\mathbb{R}$. Denotemos funcionais por letras minúsculas $f, g, h, ...$, o domínio de f por $D(f)$, a imagem por $R(f)$, e o valor de f em um elemento $x \in D$, por $f(x)$. Funcionais são operadores, com as definições anteriores aplicadas.

Definição 7. *Um funcional linear f é um operador linear com domínio no espaço vetorial X e imagem no corpo escalar K de X, assim*

$$f : D(f) \to K$$

onde $K = \mathbb{R}$.

1.5.1 Funcional Linear Limitado

Definição 8. *Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com imagem em um corpo escalar do espaço normado X em que domínio $D(f)$ se encontra. Assim, existe um número real c tal que para todo $x \in D(f)$*

$$|f(x)| \leq c\,||x|| \tag{1.20}$$

Além disso, a norma de f é

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} \tag{1.21}$$

ou

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ ||x||=1}} |f(x)| \tag{1.22}$$

e por (1.17)

$$|f(x)| \leq ||f||\,||x|| \tag{1.23}$$

*e um caso especial do **Teorema** 3 é*

Teorema 4. ***(Continuidade e Limitação)*** *Um funcional linear f com domínio $D(f)$ em um espaço normado é contínuo se e somente se f é limitado.*

As linhas da demonstração deste teorema é a mesma da demonstração do **Teorema** (3). Basta considerar o operador como um funcional linear.

1.5.2 Exemplos de Funcionais Lineares

Exemplo 6. *Produto escalar: O produto escalar com um fator mantido fixo define um funcional $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, por meio de*

f(x)= x.a= $\xi_1.a_1 + \xi_2.a_2 + \xi_3.a_3$

onde, $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ é fixado, f é linear com as operações usuais em R.Além disso,f também é limitado,de fato

$$|f(x)| = |x.a| \leq ||x|| \, ||a||$$

Para que $|f(x)| \leq ||a||$ segue de (1.22). Por outro lado, tendo $x = a$ e usando (3.3), obtemos:

$$||f|| \geq \frac{|f(a)|}{||a||} = \frac{||a||^2}{||a||} = ||a||$$

assim,a norma de f é $||f|| = ||a||$.

Exemplo 7. *(Integral Definida): A integral é um funcional no espaço $C[a, b]$. Então escolhemos f definida por*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt,$$

f é linear de (4) e limitado,com a norma $||f|| = b - a$.De fato,escrevendo $J = [a, b]$ e relembrando a norma do máximo em $C[a, b]$ obtemos

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b - a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b - a) \, ||x|| \, .$$

Tomando o supremo sobre todo o x de norma 1, obtemos $||f|| \leq b - a$. Para obter $||f|| \geq b - a$, escolhemos em particular $x = x_0 = 1$, note que $||x|| = 1$ e usando (3.3)

$$||f|| \geq \frac{|f(x_0)|}{||x_0||} = \int_a^b dt = b - a.$$

Exemplo 8. *(O espaço $C[a, b]$): Outro importante funcional no espaço $C[a, b]$ é obtido se escolhermos t_0 fixo em $J = [a, b]$ e pondo*

$$f_1(x) = x(t_0)$$

com $x \in C[a, b]$.

f_1 é linear pelas operações usuais entre funções e limitado com norma $\|f_1\| = 1$.De fato,temos

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|\,.$$

Isso implica que $\|f_1\| \leq 1$ por (1.22).Por outro lado, para a $x_0 = 1$ temos $\|x_0\| = 1$ e obtemos de (3.3)

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1$$

1.6 Espaço Normado de Operadores. Espaço Dual

Definição 9. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Denotamos por $B(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em Y.*

Teorema 5. ***(O espaço** $B(X, Y)$).O espaço vetorial $B(X, Y)$ de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado X em um espaço normado Y é em si um espaço normado e sua norma é definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{1.24}$$

Teorema 6. ***(Completeza)**. Se Y é um espaço de Banach, então $B(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Consideramos uma sequência de Cauchy arbitrária (T_n) em $B(X, Y)$ e mostraremos que converge para um operador $T \in B(X, Y)$. Como (T_n) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

com $m, n > N$.

Para todo $x \in X$ e $m, n > N$ podemos obter de

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,.\,\|x\|$$

.

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| < \epsilon \, \|x\| \tag{1.25}$$

Agora para qualquer x fixo e dado ϵ' podemos escolher $\epsilon = \epsilon_x$ de modo que $\epsilon_x \|x\| < \epsilon'$. Então, a partir de (1.25) temos $\|T_n x - T_m x\| < \epsilon'$ e vemos que $(T_n x)$ é de Cauchy em Y. Uma vez que Y é completo,$T_n x$ converge,digamos que $T_n x \rightarrow y$.Claramente, o limite $y \in Y$ depende da escolha de $x \in X$.Isto define um operador $T : X \rightarrow Y$, onde $y = Tx$. O operador T é linear ja que

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z$$

Provaremos que T é limitado e $T_n \rightarrow T$, ou seja,$\|T_n - T\| \rightarrow 0$.Como (1.25) é válida para todo $m > N$ podemos deixar $m \rightarrow \infty$.Usando a continuidade da norma, obtemos a partir de (1.25) para todo $n > N$ e $x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \left\| T_n x - \lim_{m\rightarrow\infty} T_m x \right\| = \lim_{m\rightarrow\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon \, \|x\| \, . \tag{1.26}$$

Isso mostra que $(Tn - T)$, com $n > N$ é um operador linear limitado. Uma vez que T_n é limitada, $T = Tn - (Tn - T)$ é limitada, isto é, $T \in B(X, Y)$. Além disso, se em (1.26) tomarmos o supremo sobre todo x de norma 1, obtemos

$$\|T_n - T\| \leq \epsilon \qquad n > N$$

Assim $\|T_n - T\| \rightarrow 0$

como queríamos.

□

Definição 10. ***(Espaço Dual*** X'*)Seja X um espaço normado.Daí o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{1.27}$$

que é chamado de espaço dual de X e é denotado por X'

Teorema 7. ***(Espaço Dual).****O espaço dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach.*

Definição 11. *(Isomorfismo) Um isomorfismo de um espaço normado X em um espaço normado Y é um operador linear bijetivo $T : X \to Y$ que preserva a norma,isto é, para todo $x \in X$*

$$||Tx|| = ||x||$$

(Assim ,T é uma isometria)X é dito isomorfo a Y,e ainda, X e Y são chamados espaços normados isomorfos.

1.6.1 Exemplos de Espaço Dual

Exemplo 9. *O Espaço Dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base para $\mathbb{R}^n$ com $||e_i|| = 1, i = 1, \cdots, n$. Seja $\phi \in (\mathbb{R}^n)'$ e façamos $\phi(e_i) = y_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Definamos

$$y = y_i = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n)) \in \mathbb{R}^n$$

e definamos agora o seguinte operador

$$T : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$$

$$\phi \to T\phi = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))$$

onde $y = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))$.Temos que

i) T está bem definido,pois é definido nos elementos da base de $\mathbb{R}^n$;

ii) T é linear, com efeito, sejam $\phi, \varphi \in (\mathbb{R}^n)'$ tal que $\phi(e_i) = y_i$ e $\varphi(e_i) = z_i$, $i = 1, \cdots, n$. Assim

$$T(\phi + \lambda\varphi) = ((\phi + \lambda\varphi)(e_1), (\phi + \lambda\varphi)(e_2), \cdots, (\phi + \lambda\varphi)(e_n))$$

$$= (\phi(e_1) + \lambda\varphi(e_1), \phi(e_2) + \lambda\varphi(e_2), \cdots, \phi(e_n) + \lambda\varphi(e_n))$$

$$= (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n)) + \lambda(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$$

$$= T\phi + \lambda T\varphi$$

iii) T é sobrejetor, com efeito, dado $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos ϕ tal que

$$\phi(e_1) = z_1,\ \phi(e_2) = z_2, \cdots,\ \phi(e_n) = z_n.$$

Como $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\phi \in \mathbb{R}^n$ e

$$T\phi = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))$$

$$= (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in R^n.$$

iv) T preserva a norma $\left(\|T\phi\|_{\mathbb{R}^n} = \left\|\phi_{(\mathbb{R}^n)'}\right\|\right)$. Note que

$$\|T\phi\| = \|y\| = \|(\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))\|$$

$$= \sup_{1\leq j\leq n} \left\|\phi(e_j)\right\|$$

$$\leq \sup_{1\leq j\leq n} \|\phi\| \left\|(e_j)\right\| = \sup_{1\leq j\leq n} \|\phi\| = \|\phi\|, \text{pois } \left\|e_j\right\| = 1.$$

Assim

$$\|T\phi\| \leq \|\phi\|. \tag{1.28}$$

Agora seja $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Assim

$$|\phi(x)| = \left|\phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right| \left|\phi(e_j)\right| \leq \|x\| \|y\| = \|x\| \|T\phi\|$$

logo $\frac{|\phi(x)|}{||x||} \leq ||T\phi||$ assim, $\sup_{x\neq 0} \frac{|\phi(x)|}{||x||} \leq ||T\phi||$ implicando que

$$||T\phi|| \geq ||\phi||\,. \tag{1.29}$$

De (1.28) e (1.29) temos

$$||T\phi|| = ||\phi||$$

Portanto $(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n$

□

Exemplo 10. *O Espaço Dual de l^1 é l^∞*

Demonstração. Uma base de Schawder (definição 3) para ℓ^1 é $(e_k) = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$; onde cada $x \in \ell^1$ tem uma única representação

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{1.30}$$

Vamos considerar $f \in \ell^{1'}$, onde $\ell^{1'}$ é o espaço dual de ℓ^1 .Uma vez que f é linear e limitada,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k,\ \text{com}\ \gamma_k = f(e_k), \tag{1.31}$$

onde os numeros $\gamma_k = f(e_k)$ são determinados unicamente por f. Também $||e_k|| = 1$ e

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq ||f|| \cdot ||e_k|| = ||f||\,, \qquad \sup_k |\gamma_k| \leq ||f|| \tag{1.32}$$

Assim $(\gamma_k) \in \ell^\infty$.

Por outro lado, para cada $b = (\beta_k) \in \ell^\infty$ podemos obter um funcional linear limitado correspodente g de ℓ^1. De fato,Podemos definir g de ℓ^1 por,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \tag{1.33}$$

onde $x = (\xi_k) \in \ell^1$.Então g é linear e a limitação segue de

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup \left|\beta_j\right| \sum |\xi_k| = ||x|| \cdot \sup \left|\beta_j\right| \tag{1.34}$$

Daí $g \in \ell^{1'}$.

Mostraremos agora que a norma de f é a norma no espaço ℓ^∞, de (1.31) temos,

$$|f(x)| = \left|\sum \xi_k \gamma_k\right| \leq \sup_j \left|\gamma_j\right| \cdot \sum |\xi_k| = \|x\| \cdot \sup_j \left|\gamma_j\right| \tag{1.35}$$

considerando o supremo sobre todo x de norma 1, temos

$$\|f\| \leq \sup_j (\gamma_j)$$

daí de (1.32)

$$\|f\| = \sup_j (\gamma_j)$$

que é a norma em ℓ^∞. Assim, está formula pode ser escrita $\|f\| = \|c\|_\infty$ onde $c = (\gamma_j) \in \ell^\infty$, isso mostra que a aplicação linear bijetiva de ℓ^1 em ℓ^∞ definida por $f \mapsto c = (\gamma_j)$ é um isomorfismo.

Capítulo 2

Espaços com Produto Interno.Espaços de Hilbert

2.1 Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert

Definição 12. *Um espaço com produto interno(ou pré-espaço de Hilbert) é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo(completo na métrica definida pelo produto interno). Aqui um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ no corpo escalar K de X, isto é, para cada par de vetores x e y associamos um escalar que é escrito como*

$$\langle x, y \rangle$$

e é chamado o produto interno de x com y tal que para todos x, y, z e escalares α teremos

IP1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

IP2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

IP3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

IP4) $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Um produto interno em X define uma norma em X denotada por

$$||x|| = \sqrt{\langle x, y\rangle} \tag{2.1}$$

e uma métrica em X denotada por

$$d(x,\ y) = ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}\,. \tag{2.2}$$

Assim, espaços com produto interno são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach. A prova de (2.1) satisfaz os axiomas (N1) a (N4) de uma norma, e será dada no início da seção (2.4). De (IP1) a (IP3) obtemos as fórmulas

a) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$;

b) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$;

c) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x, z\rangle$;

Demonstração. **a)** Utilizando as ropriedades (IP1) e (IP2) sucessivamente obtemos

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle\,.$$

b) Usando as propriedades (IP3), (IP2) e novamente a propriedade (IP3) nesta mesma ordem obtemos

$$\langle x, \alpha y\rangle = \langle \alpha y, x\rangle = \alpha \langle y, x\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$$

completando a prova .

c) De modo semelhante,porém com as propriedades (IP3), (IP1), (IP2) e (IP3) obtemos $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \langle \alpha y + \beta z, x\rangle = \langle \alpha y, x\rangle + \langle \beta z, x\rangle = \alpha \langle y, x\rangle + \beta \langle z, x\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x, z\rangle$

completando a prova.

Essas fórmulas são fundamentais e vamos utilizar com bastante frequência. a) mostra que o produto é linear no primeiro fator.Mostraremos agora atravez de um cálculo simples com o uso das propriedades aqui apresentadas,que a norma proveniente de um produto interno satisfaz a importante igualdade do paralelogramo

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{2.3}$$

De (2.1)

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle$$

aplicando as propriedades (IP1) ,(IP2)e (IP3) no segundo membro da igualdade anterior obtemos

$$\langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle + \langle x, x - y\rangle - \langle y, x - y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle - (\langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle)$$

novamente de (2.1) e (IP3) vamos ter

$$= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 + ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

$$= 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2$$

$$= 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

completando a prova. □

2.1.1 Ortogonalidade

Definição 13. *Um elemento x de um espaço com produto interno X é dito ortogonal a um elemento $y \in X$ se*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Se x e y são ortogonais escrevemos $x \perp y$. Similarmente, para $A, B \subset X$ escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$ e $A \perp B$ se $a \perp b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$.

2.2 Exemplos de espaços de Hilbert

2.2.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Demonstração. O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert e escrevemos o produto interno por

$$\langle x, y\rangle = \xi_1.\eta_1 + \xi_2.\eta_2 \ldots, \xi_n.\eta_n \tag{2.4}$$

onde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$,

de fato, de (2.4) obtemos

$$\|x\|_1 = \langle x, x\rangle^{1/2} = ({\xi_1}^2 + \ldots + {\xi_n}^2)^{1/2}$$

e a métrica euclidiana é definida por

$$d(x,\ y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{1/2}.$$

A completeza de $\mathbb{R}^n$ foi provada na seção (4.35). □

2.2.2 Espaço sequência ℓ^2

Demonstração. O espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert com o produto interno denotado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \tag{2.5}$$

a convergencia desta série segue apartir da desigualdade de Cauchy Schwarz (5.5) do Apêndice.Provar que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j < \infty$$

é dizer que $f : \ell^2 \times \ell^2 \to K$ está bem definida,onde K é um corpo escalar de X. Assim,pela desigualdade de Cauchy Schwarz (5.5) do apêndice

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j \eta_j \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}$$

uma vez que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2 < \infty$$

onde $\xi_j, \eta_j \in \ell^2$ concluimos que

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j . \eta_j \right| < \infty$$

isto é, a série é absolutamente convergente, portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j < \infty \, .$$

A norma está definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j \right|^2)^{1/2} \, .$$

A completeza deste espaço se observa a partir da completesa de l^p que está na seção (1.1.2), basta considerar o caso $p = 2$.

□

2.3 Exemplos de espaços que não são de Hilbert

2.3.1 Espaço ℓ^p com $p \neq 2$

Demonstração. O espaço l^p com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno,portanto não é um espaço de Hilbert. Nossa afirmação se dá pelo fato de que a norma de ℓ^p com $p \neq 2$ não pode ser obtida apartir de um produto interno. Provamos isto mostrando que a norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (2.3).De fato,considerando

$x = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots) \in \ell^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots) \in \ell^p$ e calculando

$$||x|| = (|1|^p + |1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

e

$$||y|| = (|1|^p + |-1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

De onde temos

$$||x + y|| = (|1 + 1|^p + |1 - 1|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2$$

$$||x - y|| = (|1 - 1|^p + |1 - (-1)|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2$$

observando que

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 8$$

e

$$2(||x|^2 + ||y||^2) = 2[(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2] = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) = 2(2.2^{2/p}) = 2(2^{(2/p)+1}) = 2^{(2/p)+2}$$

$$= 2^{(2+2p)/p}$$

Logo para $p \neq 2$, ℓ^p é um espaço de Banach ,mas não é um espaço de Hilbert. O mesmo é válido para o espaço do próximo exemplo.

□

2.3.2 Espaço $C[a,b]$

Demonstração. O espaço $C[a,b]$ não é um espaço com produto interno, portanto não é um espaço de Hilbert. Mostraremos que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t\in J} |x(t)| \qquad J = [a,b]$$

não pode ser obtida a partir de um produto interno, uma vez que esta norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (2.3).De fato, se considerarmos

$$x(t) = 1$$

e

$$y(t) = (t-a)/(b-a)$$

como

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b+t-2a)}{(b-a)}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b-t)}{(b-a)}$$

logo

$$\|x+y\| = \max_{t\in J}\left|\frac{(b+t-2a)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(2b-2a)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(2(b-a))}{(b-a)}\right|$$

$$= \max_{t\in J} |2| = 2$$

$$\|x-y\| = \max_{t\in J}\left|\frac{(b-t)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(b-a)}{(b-a)}\right|$$

$$= \max_{t\in J} |1| = 1$$

$$\|x\| = \max_{t\in J} |1| = 1$$

$$||y|| = \max_{t \in J} \left| \frac{(t-a)}{(b-a)} \right| = \max_{t \in J} \left| \frac{(b-a)}{(b-a)} \right| = 1$$

temos

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 4 + 1 = 5$$

e

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = 2(1+1) = 4 \neq 5$$

completando a prova.

□

2.4 Propriedades adicionais de espaços com produto interno

Antes de tudo devemos verificar que (2.1) define uma norma. As propriedades (N1) e (N2) seguem de (IP4). De fato,

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle \geq 0 \; e \; ||x||^2 = \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Além disso, (N3), é obtido através da ultilização de (IP2) e (IP3). De fato,

$$||\alpha x||^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \langle x, \alpha x \rangle = \alpha \alpha \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \,.\, ||x||^2 \,.$$

Finalmente,(N4) está incluido no

Lema 1. ***Desigualdade de Schwarz e Desigualdade triangular***. *Um produto interno e sua correspondente norma satisfaz as desigualdades seguintes:*

a)

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \,.\, ||y|| \quad (Desigualdade\ de\ Schwarz) \tag{2.6}$$

onde o sinal de igualdade vale se, e somente se o conjunto $\{x, y\}$ *é Linarmente Dependente.*

b)

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \,.(Desigualdade\ triangular) \tag{2.7}$$

onde o sinal de igualdade vale se e somente se $y = 0$ ou $x = c.y$ com $c \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

a) Se $y = 0$, então (2.6) vale pois $\langle x, 0\rangle = 0$. Seja $y \neq 0$. Para um escalar α temos

$$0 \leq ||x - \alpha y||^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle$$

$$= \langle x, x - \alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x - \alpha y\rangle$$

e usando as propriedades do produto interno obtemos

$$= \langle x, x\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle - \alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle$$

Logo

$$= \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \alpha \langle y, y\rangle]$$

Vemos que a ultima espressão entre colchetes é zero se escollhermos

$$\alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

A desigualdade restante é

$$0 \leq \langle x, x\rangle \ - \frac{\langle y, x\rangle \,.\, \langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = ||x||^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2}$$

Aqui utilizou-se $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Multiplicando por $||y||^2$, e transferindo o último termo para o primeiro membro e tomando a raiz quadrada obtemos:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2 \,.\, ||y||^2 \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \,.\, ||y||.$$

A igualdade vale se, e somete se $y = 0$ ou $0 = ||x - \alpha y||^2$, daí $x - \alpha y = 0 \Rightarrow x = \alpha y$ que mostra a dependência linear.

b) Temos:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Assim

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

considerando a raiz quadrada em ambos os membros temos

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Lema 2. ***(Continuidade do produto interno)***

Se em um espaço com produto interno tivermos $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

Demonstração. Temos que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$

proseguindo temos pela desigualdade triangular que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| .$$

Finalmente pela desigualdade de Schwarz (2.6) obtemos,

$$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0$$

pois $y_n - y \to 0$ e $x_n - x \to 0$ quando $n \to \infty$ e x_n e y_n são limitadas. Portanto,

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0$$

quando $n \to \infty$, isto é, $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ como queríamos.

□

2.4.1 Representação de funcionais em espaços de Hilbert

Teorema 8. ***(Teorema da Representação de Riesz em Hilbert)*** *Todo funcional linear limitado f definido em um espaço de Hilbert H pode ser representado da forma*

$$f(x) = \langle x,\ z\rangle\ \ \forall\ x \in H. \tag{2.8}$$

onde z é único e depende de f,e ainda

$$||z|| = ||f||\,. \tag{2.9}$$

Iremos dividir a demonstração em três etapas:

1ª Etapa: Representação do funcional.

Se $f = 0$, de (2.8) e (2.9) temos $z = 0$.

Se $f \neq 0$, como $N(f)$ é um subespaço vetorial (pelo teorema (13)) e fechado (pelo corolário **??**) de H, $f \neq 0$ implica $N(f) \neq H$. Daí pelo teorema (12)

$$H = N(f) \oplus N(f)^{\perp}$$

e $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$; pois se $N(f)^{\perp} = \{0\}$ teriamos $H = N(f)$ absurdo, logo existe $z_0 \neq 0$ com $z_0 \in N(f)^{\perp}$ fixando um $x \in H$, considere,

$$v = f(x) \cdot z_0 - f(z_0) \cdot x. \tag{2.10}$$

Aplicando f obtemos,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(f(x)\cdot z_0 - f(z_0)\cdot x) \\ &= f(f(x)\cdot z_0) - f(f(z_0)\cdot x) \end{aligned}$$

como $f(x)$ é constante pois x é fixo, temos

$$f(v) = f(x)\cdot f(z_0) - f(z_0)\cdot f(x) = 0 \tag{2.11}$$

isto mostra que $v \in N(f)$, e temos que $v \perp z_0$, pois $v \in N(f)$ e $z_0 \perp N(f)$, devido $z_0 \in N(f)^{\perp}$ isto implica que $\langle v,\ z_0\rangle = 0$, com isso temos,

$$\begin{aligned} 0 = \langle v,\ z_0\rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)\cdot z_0,\ z_0\rangle - \langle f(z_0)x,\ z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0,\ z_0\rangle - f(z_0)\langle x,\ z_0\rangle \\ &= f(x)||z_0||^2 - f(z_0)\langle x,\ z_0\rangle \end{aligned}$$

e como $z_0 \neq 0$ podemos concluir

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot\langle x,\ z_0\rangle \tag{2.12}$$

e temos,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot\langle x,\ z_0\rangle &= \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot\langle z_0,\ x\rangle \\ &= \left\langle \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot z_0,\ x\right\rangle \\ &= \left\langle x,\ \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot z_0\right\rangle \end{aligned}$$

e podemos escrever apartir de (2.8)

$$z = \frac{f(z_0)}{||z_0||^2}\cdot z_0. \tag{2.13}$$

Como $x \in H$, e é arbitrário, (2.8) está provado, isto é, temos a igualdade,

$$f(x) = \langle x,\ z\rangle\ \forall\ x \in H. \tag{2.14}$$

Note que o vetor em (2.13) não depende de x.

2ª Etapa: Unicidade do vetor z.

Suponhamos que existam z_1 e z_2 vetores em H tal que

$$f(x) = \langle x,\ z_1\rangle = \langle x,\ z_2\rangle\ \forall\ x \in H \tag{2.15}$$

daí

$$\langle x,\ z_1\rangle - \langle x,\ z_2\rangle = 0\ \forall\ x \in H. \tag{2.16}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle x,\ z_1\rangle - \langle z_2,\ x\rangle &= \langle x,\ z_1\rangle + \langle -z_2,\ x\rangle\\ &= \langle z_1,\ x\rangle + \langle -z_2,\ x\rangle\\ &= \langle z_1 - z_2,\ x\rangle\\ &= \langle x,\ z_1 - z_2\rangle = 0\ \forall\ x \in H.\end{aligned}$$

Em partcular para $x = z_1 - z_2$ temos

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = ||z_1 - z_2||^2 = 0.$$

Portanto,

$$z_1 = z_2,$$

isto prova a unicidade de z.

3ª Etapa: Igualdade das Normas.

Se $f = 0$ então $z = 0$ e 2.9 vale. Seja $f \neq 0$ então $z \neq 0$ .De (2.8) com $x = z$ e da limitação de f segue,

$$||z||^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leq ||f|| \cdot ||z||\,. \tag{2.17}$$

dividindo por $||z|| \neq 0$ segue

$$||z|| \leq ||f|| \tag{2.18}$$

Vamos mostrar agora $||f|| \leq ||z||$, de (2.8) e da desigualdade de Schwarz (2.6), temos

$$|f(x)| = |\langle x,\ z\rangle| \leq ||x|| \cdot ||z||\,, \tag{2.19}$$

isto implica

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |\langle x,\ z\rangle| \leq ||z|| \tag{2.20}$$

de (2.18) e (2.20) concluímos

$$||f|| = ||z||\,.$$

□

Lema 3. *Se $\langle v_1,\ w\rangle = \langle v_2,\ w\rangle$ para todo w no espaço com produto interno X, então $v_1 = v_2$, em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ para todo $w \in X$ implica $v_1 = 0$.*

Demonstração. Para todo $w \in X$,

$$\langle v_1 - v_2,\ w\rangle = 0. \tag{2.21}$$

para $w = v_1 - v_2$ segue

$$||v_1 - v_2||^2 = 0.$$

Assim $v_1 - v_2 = 0$, então $v_1 = v_2$. Em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ com $w = v_1$, daí

$$||v_1||^2 = 0,$$

então $v_1 = 0$.

□

Capítulo 3

Os Teoremas de Deformação e o Teorema do Passo da montanha

3.1 Os Teoremas de Deformação

Definição 14. *Seja* $\psi : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1 *num espaço de Banach X. Dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é um valor crítico de* ψ *se* $\psi(u) = c$ *para algum ponto crítico* $u \in X$. *O conjunto de todos os pontos críticos no nível c será designado por* K_c *, isto é,*

$$K_c = \{u \in X \mid \psi'(u) = 0,\ \psi(u) = c\}\,. \tag{3.1}$$

Também, designamos por ψ^c *o conjunto de todos os pontos* u, *em níveis menores ou iguais a c, isto é,*

$$\psi^c = \{u \in X \mid \psi(u) \leq c\}\,. \tag{3.2}$$

Um ingrediente fundamental para os métodos topológicos que consideraremos é o chamado Teorema de Deformação. A grosso modo, ele nos diz quando e como podemos deformar um funcional no nível ψ^{c_1} em ψ^{c_2} nível, para $c_1 > c_2$ ou $c_1 < c_2$.

Teorema 9. *(**Teorema de Deformação**): Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 no Espaço de Banach X. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \tag{3.3}$$

para todo $u \in \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$. Então existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:

i) $\eta(0, u) = u$,

ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \psi^{c-\epsilon} \cap S_{\delta}$.

Onde, dados um subconjunto $S \subset X$ e $\delta > 0$, S_δ designa a vizinhança fechada de S, definida por:

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u, s) \leq \delta\}.$$

Seja X um espaço de Banach e $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Definição 15. *Dizemos que $(u_n) \subset X$, é uma sequência **Palais-Smale-(PS)**, no nível c, denotada por $(PS)_c$ quando*

$$\psi(u_n) \to c \;\; e \;\; \psi'(u_n) \to 0.$$

Definição 16. *Dizemos que ψ, verifica a condição de (PS), quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X, isto é,*

$$\psi(u_n) \to c \;\; e \;\; \psi'(u_n) \to 0,$$

existem $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_k} \to u_0 \;\; em \;\; X.$$

Teorema 10. *(**Teorema de Deformação**): Suponha que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (**PS**). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ψ então, para todo ϵ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que (para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$) :*

i) $\eta(0, u) = u$,

ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$.

Demonstração. Uma vez que por hipótese c não é valor critico de ψ, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que,

$$\text{se } \; u \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \Rightarrow \|\psi'(u)\| \geq \beta,$$

pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u_{\alpha,\beta} \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \;\; \text{com} \;\; \left\|\psi'(u_{\alpha,\beta})\right\| < \beta.$$

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2n}, \; \beta = \frac{1}{n} \; \text{ e } \; u_n = u_{\alpha_n, \beta_n},$$

temos

$$c - \frac{1}{n} \leq \psi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \; \text{ e } \; \|\psi'(u_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Daí

$$\psi(u_n) \longrightarrow c \; \text{ e } \; \psi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Como ψ verifica a condição (**PS**), existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos

$$\psi(u_{n_k}) \longrightarrow \psi(u) \; \text{ e } \; \psi'(u_{n_k}) \longrightarrow \psi'(u),$$

portanto, pela unicidade do limite segue

$$\psi(u) = c \ \text{ e } \ \psi'(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ψ, contradizendo a hipótese. Daí, usando o Teorema 9 de Deformação, com $X = S$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$, concluímos a demonstração do Teorema 10 de Deformação.

□

3.2 O Teorema do Passo da Montanha

Vamos agora apresentar uma primeira ilustração do método minimax, a qual tem provado ser uma ferramenta poderosa na abordagem de muitos problemas não-lineares em equações diferenciais, o chamado Teorema do **Passo da Montanha** de **Ambrosetti** e **Rabinowitz**.

Teorema 11. ***(Teorema do Passo da Montanha):*** *Seja X um espaço de Banach e seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de* ***Palais-Smale (PS)*** *[ou $(PS)_c$]. Suponha que, se*

$$e \in X \ \ e \ \ 0 < r < ||e|| \tag{3.4}$$

são tais que

$$a \equiv \max\{\psi(0), \psi(e)\} < \inf_{||u||=r} \psi(u) \equiv b, \tag{3.5}$$

Então

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{3.6}$$

é um valor crítico de ψ com $c \geq b$. Onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ tal\ que\ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

é a classe de caminhos ligando 0 a e.

Demonstração. Seja

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{3.7}$$

Afirmamos que c está bem definido. pois, sendo $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $\gamma \in C([0,1],X)$, segue que $\psi \circ \gamma$ é uma aplicação contínua, e sendo $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $\psi \circ \gamma$ possui em $[0,1]$, um máximo, e por isso trocamos o supremo por máximo em (3.6) pois, como $\gamma([0,1])$ é compacto em X, então $\psi(\gamma(t))$ também é compacto. Notemos que,

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_r \neq \emptyset \tag{3.8}$$

para qualquer $\gamma \in \Gamma$, pois $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$ e $0 < r < ||e||$ por hipótese. Portanto,

$$\max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B_r} \psi, \quad \text{pois,}$$

pela definição de b, temos

$$b \leq \psi(u), \ \forall\ u \in X;\ ||u|| = r.$$

considerando a função

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{3.9}$$

definida por,

$$t \to g(t) = ||\gamma(t)|| \ \ \forall t \in [0,1] \tag{3.10}$$

seque-se que g é contínua, note que:

$$g(0) = ||\gamma(0)|| = ||0|| = 0, \ \ g(1) = ||\gamma(1)|| = ||e|| > r \tag{3.11}$$

isto é, $g(0) < r < g(1)$, então pelo teorema do valor intermediário existe t_0 em $(0,1)$ tal que,

$$g(t_0) = ||\gamma(t_0)|| = r.$$

logo existe $u_0 = \gamma(t_0) \in X$, tal que $||u_0|| = r$, assim, $b \leq \psi(u_0)$ e

$$\psi(u_0) = \psi(\gamma(t_0)) \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

implicando que

$$b \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrários, temos

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Agora suponha que c não é um valor crítico de ψ. Então pelo **Teorema** 10 **de Deformação**, para,

$$0 < \epsilon < \frac{(b-a)}{2}, \quad \text{existe} \;\; \eta \in C([0,1]\times X, X) \tag{3.12}$$

tal que,

ii) $\eta(t,u) = u \; se \; u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

iii) $\eta(1,\psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$,

Agora, pela definição de c, como um ínfimo sobre Γ, podemos escolher um $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que,

$$c < \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma_0(t)) \leq c + \epsilon. \tag{3.13}$$

Considere o caminho $\hat{\gamma}(t) = \eta(1,\gamma(t))$. Por ($ii$) e pelo fato que $2\epsilon < b - a$, segue-se que $\hat{\gamma} \in \Gamma$, pois,

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1,0) = 0 \;\; \text{e} \;\; \hat{\gamma}(1) = \eta(1,e) = e \tag{3.14}$$

uma vez que

$$\psi(0), \psi(e) \leq a < b - 2\epsilon. \tag{3.15}$$

De (3.13) seque,

$$\gamma_0(t) \in \psi^{c+\epsilon} \tag{3.16}$$

De (iii) e (3.16) temos,

$$\hat{\gamma}_0(t) = \eta(1,\gamma_0(t)) \in \psi^{c-\epsilon}, \;\; \forall t \in [0,1],$$

ou seja

$$\psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon, \ \forall t \in [0, 1],$$

logo

$$\max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)),$$

temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon$$

então

$$c \leq c - \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico de ψ. Isto encerra a demonstração do Teorema 11 do Passo da Montanha . $\square$

Capítulo 4

Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha

4.1 Método Variacional a um problema de Dirichlet não linear

Seja o seguinte problema de Dirichlet não linear

$$-\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \tag{4.1}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a seguinte condição de crescimento:

- (H1) $\exists\, c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ $[0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2]$

tais que

$$|f(x,t)| \leq c\,|t|^{\sigma} + d.$$

Estamos interessados em encontrar soluções fracas do problema acima, isto é, funções $u \in H_0^1(\Omega)$, tais que

$$\int_{\Omega} [\nabla u.\nabla v - f(x,u)v]\, dx = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Para isso, lembrando que o método variacional consiste em associar ao problema acima um funcional, de tal modo que pontos críticos do funcional sejam soluções fracas do problema. O candidato natural a funcional associado ao problema (4.21), é dado por $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x,u).$$

Assim, esta solução fraca será ponto crítico do funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ se, e somente se, este funcional satisfizer

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x,u)v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

O lema abaixo, confirmará que, de fato, este é o funcional associado ao problema (4.21).

Lema 4. *Suponha que $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição de crescimento (H_1). Então o funcional*

$$\psi(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right] dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

está bem definido e, de fato, $\psi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} [\nabla u.\nabla v - f(x,u)v]\, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Onde

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (4.21) *se, e somente se, u é um ponto critico de ψ.*

Demonstração. Vamos sempre considerar o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$||u|| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual é equivalente a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$,

$$||u|| = \left(\int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde verifica-se pela desigualdade de Poincaré (ver Teorema 21).

Vamos primeiramente mostrar que sob a condição $(H1)$, temos que ψ está bem definido. Para isso, vamos escrever,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \ \text{ e } \ \psi_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Note que,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \frac{1}{2}\,||u||^2 < +\infty,$$

pois, $u \in H_0^1(\Omega)$. Agora para concluímos que ψ está bem definido, basta mostrarmos que ψ_2 também é finito. Vamos começar mostrando a seguinte desigualdade

$$|F(x,t)| \leq d\,|t| + c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}, \ \text{ onde } \ 0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \ \text{ e } N > 2. \qquad (4.4)$$

Para isso vamos analisar dois casos: Caso (a) $t \geq 0$, por (H_1) temos

$$|F(x,t)| \leq \int_0^t |f(x,z)|\, dz \leq d\int_0^t dz + c\int_0^t |z|^\sigma\, dz = dt + \frac{ct^{\sigma+1}}{\sigma+1} = d\,|t| + \frac{c\,|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

Caso (b) $t < 0$, segue

$$|F(x,t)| = \left|\int_0^t f(x,z)dz\right| = \left|-\int_t^0 f(x,z)dz\right| \leq \int_t^0 |f(x,z)|\, dz,$$

logo,

$$|F(x,t)| \leq d\int_t^0 dz + c\int_t^0 |z|^\sigma\, dz$$

ou seja,

$$|F(x,t)| \leq d(-t) - c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1},$$

concluímos,

$$|F(x,t)| \leq d\,|t| + c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Consequentemente (4.4), vale. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$|\psi_2| \leq \int_\Omega |F(x,t)|\,dx \leq c_3 \int_\Omega |u|\,dx + c_4 \int_\Omega |u|^{\sigma+1}\,dx < +\infty$$

por causa da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma+1}(\Omega)$, (Ver a desigualdade do Teorema 22, tem i), onde $\sigma + 1 \in [1, 2^*]$. Portanto ψ está bem definido.

Vamos provar agora que $\psi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$\psi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx, \;\; u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dividiremos está prova em dois casos:

1^o **caso:** $N > 2$.

Seja,

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx := \frac{1}{2}\langle u, u\rangle.$$

Vamos mostrar que ψ é Fréchet Difenciável com derivada contínua. Para isso, (ver as definições 28, 29 e 30). Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateux de ψ_1. Temos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi_1(u+hv) - \psi_1(u)}{h}.$$

Logo,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+hv, u+hv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{h}$$

daí obtemos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h\to 0}\left[\langle u, v\rangle + \frac{1}{2}h\langle v, v\rangle\right] = \langle u, v\rangle.$$

Esta derivada de Gateux, é a candidata natural a derivada de Fréchet. Dai, nosso objetivo é mostrar que,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

onde, $r_1(v) = \psi_1(u+v) - \psi_1(u) - \langle u, v\rangle$, para podermos concluir que, de fato, esta derivada de Gateux é a de Fréchet. A partir daí, temos

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\psi_1(u+v) - \psi_1(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle}{\|v\|}$$

o que nos dá,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\psi_1(u+v)-\psi_1(u)-\langle u,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0.$$

Isto mostra de ψ_1 é Fréchet Diferenciável em $H_0^1(\Omega)$, com

$$\psi_1'(u).v = \langle u,v\rangle$$

e consequentemente ψ_1 é contínua. Vamos mostrar agora a continuidade de ψ_1', para podermos concluir que $\psi_1 \in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$. Consideremos $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Mostraremos que

$$\psi_1'(u_n) \longrightarrow \psi_1'(u) \text{ em } \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

ou equivalentemente

$$\left\|\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Por definição segue

$$\left\|\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\|\le 1}\left|\left(\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right).v\right|.$$

Note que

$$\left|\left(\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right).v\right| = \left|\psi_1'(u_n).v-\psi_1'(u).v\right| = |\langle u_n,v\rangle - \langle u,v\rangle| = |\langle u_n-u,v\rangle|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver Teorema 23), temos

$$\left|\left(\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right).v\right| \le \|u_n-u\|.\|v\| \le \|u_n-u\|,$$

pois $\|v\| \le 1$. E agora pela definição de supremo, obtemos

$$\sup_{\|v\|\le 1}\left|\left(\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right).v\right| \le \|u_n-u\|.$$

Portanto

$$\left\|\psi_1'(u_n)-\psi_1'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, ψ_1' é contínua. De onde concluímos que $\psi_1 \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

Vamos prosseguir de maneira análoga para

$$\psi_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \quad \text{onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Mostraremos então que ψ_2 é Fréchet Diferenciável com derivada contínua, para assim concluímos que, de fato, ψ é de classe C^1. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado e para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, consideremos

$$r_1(v) = \psi_2(u+v) - \psi_2(u) - \int_\Omega f(x,u)v dx. \tag{4.5}$$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r_1(v)}{\|v\|} = 0,$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow |r_1(v)| \leq \epsilon. \|v\| \tag{4.6}$$

de (4.5) vem

$$r_1(v) = \int_\Omega (F(x,u+v) - F(x,u))dx - \int_\Omega f(x,u)v dx.$$

Segue do Teorema fundamental do Calculo (Ver Teorma 24), que

$$F(x,u+v) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dz}F(x,u+zv)dz. \tag{4.7}$$

Note que

$$\frac{d}{dz}F(x,u+zv) = \frac{d}{dz}\int_0^1 f(x,u+zv).v,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz}F(x,u+zv) = f(x,u+zv).v,$$

passando a integral com limites de integração de 0 a 1, na igualdade acima, obtemos

$$\int_0^1 \frac{d}{dz}F(x,u+zv)dz = \int_0^1 f(x,u+zv).v dz.$$

Portanto, de (4.7) e da definição de $r_1(v)$, vem

$$r_1(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x, u + zv) v dz \right] dx - \int_\Omega f(x, u) v dx$$

daí

$$r_1(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \left(f(x, u + zv) - f(x, u) \right) .v dz \right] dx$$

então

$$|r_1(v)| \leq \int_\Omega \left[\int_0^1 |\left(f(x, u + zv) - f(x, u) \right) v| \, dz \right] dx. \tag{4.8}$$

Seja, $q = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $r = \frac{2N}{N+2}$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então pela imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 22, item i), temos $v \in L^q(\Omega)$.

Vamos agora mostrar que $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. veja, desde que f satisfaz a condição de crescimento (H_1), temos

$$\int_\Omega |f(x, u)|^r \, dx \leq \int_\Omega \left[d + c\,|u|^\sigma \right]^r dx \leq k \int_\Omega \left[|d|^r + |c|^r . |u|^{\sigma r} \right] dx,$$

onde $k > 0$. Dai,

$$\int_\Omega |f(x, u)|^r \, dx \leq M\,|\Omega| + c \int_\Omega |u|^{\sigma r} \, dx. \tag{4.9}$$

Agora basta mostrarmos que a ultima integral é finita. Notemos que a condição de crescimento (H_1), é valida também para $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, com $N > 2$. Agora,

$$1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \Longrightarrow 1 < r \leq \sigma.r < 2^*, \text{ com } N > 2.$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma.r}(\Omega)$, (Ver Teorema 22, item i), obtemos que $u \in L^{\sigma.r}(\Omega)$, o que implica

$$\int_\Omega |u|^{\sigma.r} \, dx < +\infty.$$

logo de (4.9) temos,

$$\int_\Omega |f(x, u)|^r \, dx < +\infty.$$

mostrando assim que, $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. Em (4.8) aplicando o Teorema de Fubini (Ver Teorema 25), obtemos,

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |(f(x, u + zv) - f(x, u))\, v|\, dx \right] dz.$$

Agora, usando Holder, (Ver Teorema 26) segue

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}\, dz \tag{4.10}$$

Afirmação 1: Vale a convergência

$$f(\cdot, u + zv) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\; em \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0, 1], \forall\ x \in \Omega$ quando $v \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que esta afirmação é equivalente a

$$f(\cdot, u + zv_n) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\; em \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0, 1], \forall\ x \in \Omega$ com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração da afirmação 1: Consideremos $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$, (Ver Teorema 22, item i), que existe $K > 0$;

$$\|v_n\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \leq K\, \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

daí, se $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$v_n \longrightarrow 0 \;\; em \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \tag{4.11}$$

Logo, (Ver Teorema 27), existe uma subsequência de (v_n), que ainda denotaremos por, (v_n) e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq g(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega,$$

e

$$v_n \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Daí,

$$|(u + zv_n)(x)| \leq (|u| + g)(x) \text{ q.t.p } \ x \in \Omega, \ \forall \, z \in [0,1] \tag{4.12}$$

e

$$(u + zv_n)(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{4.13}$$

Agora, usando o fato de f ser uma função de Caracthéodory, juntamente com o (lema 8), e (4.13), temos

$$f(x, (u + zv_n)(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,$$

ou seja,

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento (H_1), e a limitação uniforme em (4.12) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J,$$

de onde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 28), que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_\Omega |f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \, dx \right) = 0.$$

Observação: mostramos que dado (v_n), com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \longrightarrow +\infty$, existe uma $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_\Omega \left| f(x, (u + zv_{n_k})(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{q}{\sigma}} \, dx \right) = 0. \tag{4.14}$$

Vamos supor que não ocorra a convergência uniforme. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e $z_{n_k} \in [0,1]$ tal que

$$\left\| f(\cdot,(u+z_{n_k}v_{n_k})(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \geq \epsilon_0, \quad \forall\, n_k \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Vamos prosseguir com os mesmos argumentos desde de (4.11) até (4.14). Considerando uma $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$, em particular, $v_{n_k} \longrightarrow 0$ temos novamente da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ (Ver Teorema 22 item i), que

$$v_{n_k} \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \tag{4.16}$$

logo, (Ver Teorema 27), temos que existem, uma $(v_{n_{k'}}) \subset (v_{n_k})$ e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$\left| v_{n_{k'}}(x) \right| \leq g(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,$$

e

$$v_{n_{k'}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Daí

$$\left| (u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x) \right| \leq (|u|+g(x))(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega, \ z_{n_{k'}} \in [0,1]. \tag{4.17}$$

e

$$(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{4.18}$$

Novamente, usando o fato de f ser uma função de Caracthéodory, juntamente com o (lema 8,) e (4.18), temos

$$f(x,(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x)) \longrightarrow f(x,u(x)) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Ou seja,

$$\left| f(x,(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x)) - f(x,u(x)) \right|^{\frac{q}{\sigma}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Agora usando a condição de Crescimento (H_1), a limitação uniforme em (4.17) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J_1 \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left| f(x,(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x)) - f(x,u(x)) \right|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J_1,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 28,) temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega \left|f(x,(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(x))-f(x,u(x))\right|^{\frac{q}{\sigma}}dx\right)=0,$$

ou seja,

$$\left\|f(\cdot,(u+z_{n_{k'}}v_{n_{k'}})(\cdot))-f(\cdot,u(\cdot))\right\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)}<\epsilon\ \ \forall\, n_{k'}\geq n_0$$

o que contradiz (4.15). Assim concluímos a demonstração da **afirmação 1**.

A **afirmação 1** significa que, dado $\epsilon>0$ existe um $\delta>0$ tal que

$$\|v\|<\delta \Rightarrow \|f(\cdot,u+zv)-f(\cdot,u)\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)}<\epsilon,$$

uniformemente em $z\in[0,1]$. Como $1<r<\frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 29, Apêndice), Vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, usando a desigualdade da imersão, vem

$$\|v\|<\delta \Rightarrow \|f(\cdot,u+zv)-f(\cdot,u)\|_{L^r(\Omega)}<C\epsilon, \tag{4.19}$$

uniformemente em $z\in[0,1]$. Substituindo (4.19) em (4.10), temos

$$|r(v)|\leq C\epsilon.\,\|v\|_{L^q}(\Omega).$$

Assim, pela imersão contínua $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois $q=2^*$, (Ver Teorema 22, item i Apêndice), resulta em

$$|r(v)|\leq C_1\epsilon\,\|v\|\,,\ \ \text{sempre que}\ \ \|v\|<\delta,$$

mostrando (4.6). Concluído assim que o funcional ψ_2, é Fréchet Diferenciável, com

$$\psi_2'(u).v=\int_\Omega f(x,u)v\,dx,\ \ \forall\, u\in H_0^1(\Omega).$$

Agora vamos mostrar que ψ_2' é contínuo. Considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Como no item anterior, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 28), vem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{q}{\sigma}}\,dx\right) = 0.$$

Sendo $1 < r < \frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 29), temos a imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, existe $K > 0$;

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^r(\Omega)} \leq K.\,\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)}$$

então

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \;\text{ quando }\; v_n \longrightarrow 0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega)$$

por outro lado, sabemos que

$$\left\|\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\|\leq 1}\left|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u))\,.v\right|. \tag{4.20}$$

Note agora que

$$\left|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u))\,.v\right| = \left|\int_\Omega [f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))]\,vdx\right|$$

daí

$$\left|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u))\,.v\right| \leq \int_\Omega \left|[f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))]\,v\right| dx.$$

Usando Hölder, (Ver Teorema 26), segue

$$\int_\Omega \left|[f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))]\,v\right| dx \leq \|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r\,.\,\|v\|_q\,.$$

e agora usando a imersão contínua de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 22, item i), vem que existe um $K > 0$ tal que

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \, . \, \|v\|_q \leq K \, \|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \, . \, \|v\| \, .$$

Como

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } v_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

resulta que, também

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \, . \, \|v\|_q \longrightarrow 0.$$

Então

$$\left|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)) \, .v\right| \longrightarrow 0,$$

e combinando com (4.20), temos

$$\left\|\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Isto mostra que ψ_2', é contínuo para $N > 2$. Logo $\psi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. 2^o **Caso:** $N = 2$.

Neste caso basta prosseguir de maneira análoga ao primeiro caso, fazendo apenas algumas modificações que listaremos: Primeiramente, substituamos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } q = 2^*$$

(Ver Teorema 22, item i), pela imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ com } 1 \leq q < \infty$$

(Ver Teorema 22, item ii). Em seguida, usando a imersão acima, mostra-se que

$$f(\cdot,u) \in L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega),$$

onde $\frac{r}{r-1}$ é o conjugado de r, e

$$f(x,u+zv) \longrightarrow f(x,u) \text{ em } L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$$

uniformemente em $s \in [0,1]$. Unindo os dois casos, mostra-se que $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, com

$$\psi'(u).v = \int_\Omega [\nabla u.\nabla v - f(x,u)v]\,dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

□

4.2 Existência de solução fraca para o problema de Dirichlet não linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Neste capítulo estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema:

$$-\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega \tag{4.21}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de carathéodory, satisfazendo as seguintes condições:

- (H1) $\exists\, c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ $[0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1,2]$

tais que

$$|f(x,t)| \leq c\,|t|^\sigma + d,$$

- (H2) $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0$, uniformemente em x,

- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall\; |t| \geq r, \; onde.$$

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Note que o funcional ψ, associado ao problema (4.21), também é o funcional associado ao problema (2.6).

1^o **Caso**: $N > 2$.

Lema 5. **a)** *u=0 é um ponto de mínimo local estrito para ψ:*

b) *Dado $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ (digamos $\|v\| = 1$), existe $\rho_0 > 0$; $\psi(\rho_0 v) \leq 0$:*

Demonstração. (a), pela hipótese (H_2), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x,t)| \leq \epsilon\,|t|\,,$$

portanto

$$|F(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|t|^2 \;\; se \;\; |t| \leq \delta \tag{4.22}$$

uma vez que a condição de crescimento (H_1) implica que,

$$|F(x,t)| \leq A_\epsilon\,|t|^{\sigma+1} \;\; se \;\; |t| \geq \delta \tag{4.23}$$

podemos combinar as duas equações acima, obtendo

$$|F(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|t|^2 + A_\epsilon\,|t|^{\sigma+1} \;\; \forall t \in \mathbb{R},\;\; \forall x \in \Omega. \tag{4.24}$$

daí, obtemos,

$$\psi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\epsilon}{2}\,\|u\|_{L^2}^2 - A_\epsilon\,\|u\|_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1}\,, \tag{4.25}$$

logo pelas imersões contínuas de Sobolev, temos,

$$\psi(u) \geq \frac{\|u\|^2}{2} - K_\epsilon\,\|u\|^2 - M\,\|u\|^{\sigma+1}\,, \tag{4.26}$$

ou seja,

$$\psi(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1-2K_\epsilon}{2} - M\,\|u\|^{\sigma-1} \right) \;\forall\; u \in H_0^1(\Omega)$$

para ϵ suficientemente pequeno e fixado temos,

$$0 < r < \left(\frac{1-2K_\epsilon}{2M} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

e escolhendo

$$\alpha = r^2\left[\frac{1-2K_\epsilon}{2} - Mr^{\sigma-1}\right]$$

temos,

$$\psi(u) \geq \alpha > 0,\ \psi(0) = 0, \ \text{ para } \ \|u\| = r.$$

(b) Notemos que a condição (H_3) conhecida como a condição de Ambrosetti e Rabinowitz, implica na existência de contantes $c_1, c_2 > 0$ tais que,

$$|F(x,t)| \geq c_1\,|t|^\mu - c_2 \quad \forall\ x \in \Omega,\ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Observação: Como $\mu > 2$, então F é uma função superquadrática em t, pela desigualdade acima. Vamos dividir a prova da existência das constantes em dois casos:

1^o **caso:** $t > 0$. Pela condição (H_3), temos

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

implicando

$$\int_r^t \frac{\mu}{z}dz \leq \int_r^t \frac{f(x,z)}{F(x,z)}dz,$$

daí

$$\mu \ln|z|\Big|_r^t \leq \ln|F(x,z)|\Big|_r^t, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

ou ainda

$$\mu\ln(t) - \mu\ln(r) \leq \ln(F(x,t)) - \ln(F(x,r)), \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Com isso

$$\ln\left(\frac{t}{r}\right)^\mu \leq \ln\frac{F(x,t)}{F(x,r)}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Implicando

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,r)}{r^\mu}t^\mu, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Pela condição de crescimento (H_1), podemos considerar

$$K_1 = \min_{x\in\overline{\Omega}} F(x,r).$$

Com isso, podemos escrever,

$$F(x,t) \geq \frac{K_1}{r^\mu} t^\mu, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$F(x,t) \geq C_1 t^\mu, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.28}$$

Onde $C_1 = \frac{K_1}{r^\mu}$ e $C_1 > 0$.

2^o **Caso:** $t < 0$. pela condição (H_3), segue

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\mu}{t}, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

o que implica

$$\int_t^{-r} \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz \leq \int_t^{-r} \frac{\mu}{z} dz, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

daí, com os mesmos argumentos anteriores, chegaremos

$$\ln(F(x,-r)) - \ln(F(x,t)) \leq \mu \ln|-r| - \mu \ln|t|, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

com isso, temos

$$\ln\left(\frac{F(x,-r)}{F(x,t)}\right) \leq \ln\left(\left|\frac{r}{t}\right|\right)^\mu, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

e ainda,

$$\frac{F(x,-r)}{F(x,t)} \leq \left|\frac{r}{t}\right|^\mu, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

assim,

$$\frac{1}{F(x,t)} \leq \left|\frac{r}{t}\right|^\mu . \frac{1}{F(x,-r)}, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

equivalentemente,

$$F(x,t) \geq \left|\frac{r}{t}\right|^{-\mu} .F(x,-r), \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

Considerando

$$K_2 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x,-r).$$

Temos
$$F(x,t) \geq \left|\frac{t}{r}\right|^{\mu} .K_2, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$
Então
$$F(x,t) \geq C_2. |t|^{\mu}, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.29}$$
Com $C_2 = \frac{K_2}{|r|^{\mu}}$ e $C_2 > 0$. Seja $c_1 = \min\{C_1, C_2\}$. Logo, por (4.28) e (4.29), vem
$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu}, \quad \forall \ |t| \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$
Considerando
$$M = \min\left\{F(x,t) \mid x \in \overline{\Omega}, \ t \in [-r,r]\right\}.$$
Temos
$$F(x,t) \geq M, \quad \text{para} \ \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-r,r].$$
Consideremos agora $c_2 > 0$, de modo que
$$c_2 \geq c_1 r^{\mu} - M \Rightarrow c_2 \geq c_1 |t|^{\mu} - M, \quad \forall \ t \in [-r,r],$$
ou seja,
$$M \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \quad \forall \ t \in [-r,r].$$
Portanto
$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \quad \forall \ t \in [-r,r], \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.30}$$
e
$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \quad \forall \ \ |t| \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.31}$$
De 4.30 e 4.31 segue (4.27). Com isso, temos
$$\psi(u) = \frac{||u||^2}{2} - \int_{\Omega} F(x,u)dx \leq \frac{||u||^2}{2} - c_1 \, ||u||^{\mu}_{L^{\mu}} + c_2 \, |\Omega| \tag{4.32}$$
de sorte que dado $v \in H^1_0(\Omega)$ com $||v|| = 1$, e escolhendo $\delta = c_1 \, ||v||^{\mu}_{L^{\mu}} > 0$, obtemos,
$$\psi(\rho.v) \leq \frac{1}{2}\rho^2 - \delta\rho^{\mu} + c_2 \, |\Omega| \longrightarrow -\infty \quad quando \quad \rho \longrightarrow \infty.$$

em particular, existe $\rho_0 > 0$ tal que $\psi(\rho_0 v) \leq 0$. □

Lema 6. *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to R$ é a função de Carathéodory do problema (**??**), satisfazendo as condições $(H_1) - (H_3)$, então o mesmo possui uma solução fraca não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Vamos agora começar mostrando que o funcional ψ satisfaz a condição $(P.S)$. Seja u_n uma sequência de $(PS)_c$, isto é,

$$\psi(u_n) \longrightarrow c, \quad \psi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Vamos mostrar que u_n possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$, Primeiramente, mostraremos que u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Veja,

$$\psi(u_n) = \frac{||u||^2}{2} - \int_\Omega F(x, u_n)dx,$$

então

$$\psi'(u_n)u_n = ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x, u_n)u_n dx.$$

Além disso, note que $\psi'(u_n) \to 0$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que

$$||\psi'(u_n)|| < \epsilon, \ \forall\, n \geq n_0,$$

ou seja,

$$|\psi'(u_n)u_n| \leq \epsilon\, ||u_n|| \ \ \forall\, n \geq n_0. \tag{4.33}$$

Note ainda que,

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \frac{1}{2}\,||u_n||^2 - \int_\Omega F(x, u_n)dx - \left(\frac{1}{\mu}\,||u_n||^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x, u_n)u_n dx\right).$$

segue

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)||u_n||^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)\right)dx.$$

Considerando o conjunto $V_n = \{x \in \Omega; |u_n| \geq r\}$, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)||u_n||^2 +$$

$$\int_{V_n}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx + \int_{V_n^c}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (H_3), obtemos

$$\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \geq 0,\ \forall\ x \in V_n,$$

implicando

$$\int_{V_n}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \geq 0,$$

daí

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_{V_n^c}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx,$$

consequentemente temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - \int_{V_n^c}\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right|dx.$$

Novamente, pela condição de crescimento (H_1), temos que

$$g(x,u_n) = \left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right|$$

é limitada em $\overline{\Omega}\times[-r,r]$, logo existe $C>0$ tal que

$$|g(x,u_n)| \leq C,\ \forall\ (x,u_n) \in \overline{\Omega}\times[-r,r]$$

então

$$\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right| \leq C,\ \forall\ (x,u_n) \in \overline{V_n^c}.$$

Com isso, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - \int_{\overline{V_n^c}} C dx,$$

e a partir daí

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C\left|\overline{V_n^c}\right|,$$

além disso, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C\left|\Omega\right|,$$

ou seja

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C_2. \tag{4.34}$$

Por outro lado temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq \left|\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n\right|,$$

então

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq |\psi(u_n)| + \frac{1}{\mu}\left|\psi'(u_n).u_n\right|.$$

Como $|\psi(u_n)| \leq C$ e (4.33), segue

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq C + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|, \tag{4.35}$$

para n suficientemente grande. De (4.34) e (4.35), tem-se

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - c_2 \leq c + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|$$

daí

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 \leq \hat{K} + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|$$

com $\hat{K} = c + c_2 > 0$ o que implica que $\|u_n\|$ é limitada.

Vamos agora provar que (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$. Veja, sabemos que o funcional dado pelo lema 4 é de classe $C^1\left(H_0^1(\Omega), R\right)$, e ainda que,

$$\psi'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \tag{4.36}$$

em que, $\psi'(u) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)'$. como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riesz, (Ver Teorema 31), temos

$$\psi'(u).v = \langle \nabla\psi(u), v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \text{ com } \ \|\psi'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} = \|\nabla\psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.37}$$

consideremos agora

$$J'(u).v = \int_\Omega f(x,u)v dx \tag{4.38}$$

daí,

$$\psi'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - J'(u).v, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{4.39}$$

usando novamente o Teorema da Representação de Riesz (Ver Teorema 31), para (4.38), segue,

$$J'(u).v = \langle \nabla J(u), v \rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ \text{ com } \ \|J'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} = \|\nabla J(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.40}$$

logo substituindo (4.37) e (4.40) em (4.39) temos,

$$\langle \nabla \psi(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \nabla J(u), v \rangle,$$

então,

$$\langle \nabla \psi(u), v \rangle = \langle u - \nabla J(u), v \rangle \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

daí,

$$\nabla \psi(u) = u - \nabla J(u). \tag{4.41}$$

Agora mostraremos que

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ \text{ com } \ T(u) = \nabla J(u), \tag{4.42}$$

é um operador compacto.

Lembremos atreves das propriedades de operadores compactos, que uma das formas para mostrarmos a compacidade de T, é, mostrarmos que para toda sequência limitada, $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, teremos que a sequência $T(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ possui uma subsequência convergente. (Ver Teorema 33). Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo então existe uma subsequencia que continuaremos denotando por u_n tal que converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Da imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \ \forall \, r \in [1, 2^*)$ (Ver Teorema 32, item i), implica

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega)$$

é um operador linear compacto, pela própria definição de imersão compacta. Daí i leva sequências convergindo fracamente $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, em sequências convergindo fortemente em $L^r(\Omega)$, isto é,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^r(\Omega).$$

ou seja, converge na topologia forte de $L^r(\Omega)$, e portanto, converge na norma,

$$||u_n - u||_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \tag{4.43}$$

Agora, fixando r, com $\sigma + 1 \leq r < 2^*$ e considerando q o conjugado de r, isto é, $q = \frac{r}{r-1}$. Vamos mostrar que

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^q(\Omega).$$

Note, segue de (4.43) e pelo (ver Teorema 27), que existe uma subsequência de (u_n), que ainda denotaremos por (u_n) tal que,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

e

$$|u_n(x)| \leq G(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \ \forall\, n \in N, \ G \in L^r(\Omega). \tag{4.44}$$

Como f é uma função de Carathéodory, juntamente com o (lema 8), temos

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

daí

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Agora, usando a condição de crescimento (H_1), a limitação uniforme em (4.44) e o fato de Ω ser limitado, resulta na existência de uma função $\varphi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \leq \varphi,$$

donde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 28), que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega |f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{\frac{r}{\sigma}}\,dx\right)=0,$$

ou seja,

$$f(\cdot,u_n(\cdot))\longrightarrow f(\cdot,u(\cdot))\ \text{ em }\ L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega).$$

Como $1<q<\frac{r}{\sigma}$ e Ω é limitado (Ver Teorema 29), vale a imersão contínua

$$L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Portanto,

$$\|f(\cdot,u_n(\cdot))-f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\longrightarrow 0\ \text{ quando }\ n\longrightarrow+\infty. \tag{4.45}$$

Observe que

$$\|T(u_n)-T(u)\|=\|J'(u_n)-J'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'}=\sup_{\|v\|\le 1}\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|.$$

Porem,

$$\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|=\left|\int_\Omega\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right).vdx\right|,$$

implicando que

$$\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|\le\int_\Omega\left|\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)v\right|dx,$$

usando Hölder (ver Teorema 26), obtemos

$$\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|\le\|f(\cdot,u_n(\cdot)-f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|_{L^r(\Omega)}\,.$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $r\in[\sigma+1,2^*]$ (Ver Teorema 22, item i), segue que existe um $M>0$ tal que

$$\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|\le M\,\|f(\cdot,u_n(\cdot)-f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\,\|v\|\,,$$

de onde obtemos

$$\left|\left(J'(u_n)-J'(u)\right).v\right|\le M\,\|f(\cdot,u_n(\cdot)-f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\,,$$

pois $\|v\| \leq 1$. Assim,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}. \tag{4.46}$$

Portento, de (4.45) e (4.46), concluímos que, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $T(u_n)$, tal que

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0.$$

Mostrando assim que T é compacto. Por outro lado

$$\psi'(u_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|\psi'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0, \tag{4.47}$$

logo, por (4.37) e (4.47), temos

$$\|\nabla\psi(u_n)\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \nabla\psi(u_n) \longrightarrow 0. \tag{4.48}$$

Sendo

$$\nabla\psi(u_n) = u_n - T(u_n) \Rightarrow u_n = \nabla\psi(u_n) + T(u_n). \tag{4.49}$$

Como o operador T é compacto, vem

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0. \tag{4.50}$$

Passando o limite em (4.49) e usando as convergências (4.48) e (4.50), obtemos uma subsequência tal que

$$u_n \longrightarrow T(u) \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando assim a **condição (PS)** . Mostramos a **condição (PS)** para $N > 2$. já o 2^o caso, em que $N = 2$, fica como exercício. Dica: basta substituirmos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq 2^*,$$

(Ver Teorema 22, item i), pela imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 22, item ii). E a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < 2^*,$$

(Ver Teorema 32 item i) pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 32 item ii). Em suma, aplicando o **Teorema do Passo da Montanha** 11, concluímos a existência de um ponto critico de ψ, e com o lema 4 verifica-se que esse ponto crítico é uma solução fraca do problema (4.1).

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Espaços Métricos

Espaços Métricos:

Uma métrica num conjunto X é uma função d: $X \times X \rightarrow R$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) \geq 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados $d1$) e $d2$) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado $d3$) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição $d4$) chama-se desigualdade triangular. Ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulos não excede a soma dos outros dois.

Um espaço métrico é uma par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X, ou simplesmente denotamos por X.

Sequência em espaços métricos.

Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M.Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando,para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente,pode-se obter $n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$.Escreve-se então $a = \lim x_n$.Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$

Sequências de Cauchy. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy,quando,para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Toda sequência convergente em um espaço métrico é de cauchy.

Toda sequência convergente é limitada.

5.2 O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definição 17. ***O Espaço Euclidiano*** $\mathbb{R}^n$

Este espaço é obtido se considerarmos o conjunto X de todas as n-úplas de números reais, escrito

x=(ξ_j), $y = (\eta_j)$ *com* $1 \leq j \leq n$ *e as normas definidas por*

$$||x||_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i{}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1)^2 + ... + (\xi_n)^2}. \tag{5.1}$$

$$||x||_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\xi_i|\}. \tag{5.2}$$

$$||x||_3 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,. \tag{5.3}$$

5.3 O espaço l^∞

Definição 18. ***O Espaço*** l^∞

Este é o Espaço de todas as sequências limitadas de números reais, isto é, cada elemento de l^∞ *é uma sequência de números reais*

$$x = (\xi_j)$$

tal que para todo $j = 1, 2, ...$ *temos*

$$\left\|\xi_j\right\| \leq c_x$$

onde c_x *é um número real que pode depender de x, mas não depende de j.*

5.4 O espaço l^p

Definição 19. *Seja* $p \geq 1$ *um número real fixado.Por definição,cada elemento do espaço* l^p *é uma sequência* $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p < \infty \tag{5.4}$$

5.5 O espaço de funções $C[a, b]$

Definição 20. *Este é o espaço de funções reais contínuas no compacto* $J = [a, b]$.

5.6 Alguns resultados importantes

D1) Desigualdade de Cauchy-Schwarz;

Sejam $(\xi_j) \in l^2$ e $(\eta_j) \in l^2$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j \eta_j\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2} \tag{5.5}$$

D2) Desigualdade de Hölder;

Sejam $(\xi_j) \in l^p$ e $(\eta_j) \in l^p$, com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j \eta_j\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{1/q} \tag{5.6}$$

D3) Desigualdade de Minkowski.

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j + \eta_j\right|\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{1/p} \tag{5.7}$$

com $(\xi_j) \in l^p$ e $(\eta_j) \in l^p$, e $p \geq 1$

Definição 21. ***(Independência linear)****Dizemos que um conjunto $L = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de vetores em um espaço vetorial X é linearmente independente se e somente se a igualdade do tipo*

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ escalares só for possível se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 22. ***(Dependência linear)****Dizemos que um conjunto $L = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de vetores em um espaço vetorial X é linearmente dependente se e somente se L não é Linearmente independente ,ou seja, é possível uma igualdade do tipo*

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

sem que todos α_j sejam iguais a zero.

Definição 23. *Seja X um espaço vetorial tal que $dimX = n$. Uma independência linear de n-uplas de vetores de X chamada de uma base para X. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base para X,então todo elemento $x \in X$ possui uma única representação*

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Lema 7. ***(Combinações lineares)****Seja* $\{x_l, \cdots, x_n\}$ *um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado X(de dimensão n).Então existe um número* $c > 0$ *tal que*

$$||\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n|| \geq c(|\xi_1| + ... + |\xi_n|) \tag{5.8}$$

Definição 24. *(**Soma Direta**) Um espaço vetorial H é dito ser uma soma direta dos subespaços Y e Z de H e escrevemos*

$$H = Y \oplus Z$$

se cada $x \in H$ *tem uma única representação da forma*

$$x = y + z$$

com $y \in Y$ *e* $z \in Z$.

Definição 25. *O **Complemento ortogonal** de um subespaço Y de H,denotado por* $Y^{\perp}$ *é o conjunto*

$$Y^{\perp} = \{z \in H; z \perp Y\}$$

Teorema 12. ***(Soma Direta)*** *Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H.Então*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Teorema 13. ***(Núcleo e espaço nulo)*** *Seja* T *um operador. Então:*

a) *A imagem* $R(T)$ *é um espaço vetorial;*

b) *Se* $dimD(T) = n < \infty$, $dimR(T) \leq n$;

c) *O espaço nulo* $N(T)$ *é um espaço vetorial;*

Teorema 14. ***(Teorema fundamental do cálculo)*** *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua no intervalo I.As seguintes afirmações a respeito de uma função* $F : I \to \mathbb{R}$ *são equivalentes:*

(1) *F é uma integral indefinida de f, isto é, existe* $a \in I$ *tal que* $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$*, para todo* $x \in I$.

(2) *F é uma primitiva de f, isto é,*$F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Teorema 15. ***(Weiertrass)*** *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua no conjunto compacto* $X \subset \mathbb{R}$*.Existem* x_0 *e* $x_1 \in X$ *tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

para todo $x \in X$*.*

Teorema 16. ***(Composição de funções contínuas)*** *Dada* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua no ponto* $a \in X$*,*$g : y \to \mathbb{R}$ *contínua no ponto* $b = f(a) \in Y$ *e* $f(X) \subset Y$*, de modo que a composta* $g \circ f$ *esteja bem definida.Então* $g \circ f$ *é contínua no ponto a.*

Corolário 2. *.Se* $f : [a, b] \to R$ *é integrável e* $|f(x)| \leq K$ *para todo* $x \in [a, b]$ *então* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b - a)$

Teorema 17. ***Se*** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ***é integrável então*** $|f|$ ***é integravel e***

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{5.9}$$

Teorema 18. ***Toda função contínua*** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ***é integrável***

Teorema 19. ***(Teorema do Valor Médio de lagrange)*** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua.Se f é derivável em (a,b),existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c)(b - a) = [f(b) - f(a)]$$

Definição 26. *Uma uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to R$ quando para todo $\epsilon > o$ dado,existe $n_0 \in N$(dependendo apenas de ϵ) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ seja qual for $x \in X$.*

Teorema 20. *Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

5.7 Alguns resultados sobre Espaços de Lebesgue e Sobolev.

Definição 27. *Uma função f de X em $\mathbb{R}$ é dita X-mensurável, (ou simplesmente mensurável), se para qualquer numero real α, tem-se*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Definição 28. *Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que uma aplicação $\psi : U \to F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que*

$$\psi(x_0 + h) = \psi(x_0) + A(h) + r(x_0, h),$$

para todo h, tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0, e contida em U, onde $r(x_0, h) = o(||h||)$, isto é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{||r(x_0, h)||}{||h||} = 0.$$

Neste caso A é chamada de derivada de Fréchet de ψ em x_0, a derivada de Fréchet no ponto x_0, quando existe, é única, denotamos por $\psi'(x_0)$.

Definição 29. *Se B é um aberto de um espaço de Banach X, dizemos que ψ é de classe C^1 em B, ou que $\psi \in C^1(B, R)$ quando a derivada de Fréchet de ψ*

existe em todo $x \in B$ e a aplicação $\psi' : B \to X'$ é contínua. Onde X' denotará o dual de X.

Definição 30. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\psi : X \to R$, dizemos que ψ possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existem um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(u+tv) - \psi(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \textit{para todo } \; v \in X.$$

Definição 31.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to R : u \textit{ é mensurável}, \; \int_\Omega |u|^p < +\infty \right\}.$$

Definição 32.

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, ..., N \right\}.$$

Onde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx \;\; \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Quando $p = 2$ e $m = 1$ escrevemos $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Todo o trabalho foi desenvolvido sobre $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 21. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}, \;\; \forall \, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \;\; 1 \le p \le +\infty.$$

Teorema 22. *Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(N \ge 2)$, Ω de classe C^m e $1 \le p \le +\infty$. Então as imersões são contínuas:*

i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; 1 \le q \le \frac{Np}{N-mp} = p^*$ *se* $mp < N$.

ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; 1 \le q \le +\infty$ *se* $mp = N$.

Como consequência das imersões, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{m,p}} .$$

Para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 23. ***(Desigualdade de Schwarz)****: Seja $(X, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Então:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Teorema 24. ***(Teorema Fundamental do Cálculo)****: Sejam G um espaço vetorial normado completo e $f : [a, b] \longrightarrow G$ contínua, são equivalentes:*

i) Se F é uma integral indefinida de f, então

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall \ x \in [a, b]$$

ii) Se F é uma primitiva de f, então

$$F'(x) = f(x) \ \forall \ x \in [a, b].$$

Teorema 25. ***(Teorema de Fubine)****: Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \ e \ \left(\int_{\Omega_2} F(x, y)dy \right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \ e \ \left(\int_{\Omega_1} F(x, y)dy \right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)dxdy.$$

Teorema 26. ***(Desigualdade de Holder)****: Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \geq 1$. Então,*

$$f.g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |f.g|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Teorema 27. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;

ii) $\left|f_{n_k}(x)\right| \leq h(x)$ q.t.p em Ω.

Teorema 28. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)****: Seja f_n uma sequência de funções integráveis. Suponha que*

i) $f_n \to f(x)$ q.t.p em Ω

ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p Ω, para alguma função $g \in L^1(\Omega)$. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Teorema 29. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um conjunto limitado e $1 \leq p \leq q$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, e além disso, a imersão*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua.

Teorema 30. ***(Imersão de Sobolev)****: Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ e $1 \leq q \leq +\infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões são contínuas:*

i) $Se\ m < \frac{N}{p},\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega),\ p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*;$

ii) $Se\ m = \frac{N}{p},\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega),\ p \leq q \leq +\infty.$

Teorema 31. *(**Teorema da Representação de Riesz-Fréchet**): Seja H um espaço de Hilbert, então dado $\varphi \in H'$, existe uma única $f \in H$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \ \forall \ \ v \in H.$$

E mais ainda, verifica-se que

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'} .$$

Teorema 32. *(**Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov**): Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões abaixo são compactas:*

i) $Se\, m < \frac{N}{p},\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega),\ 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} = p^*;$

ii) $Se\, m = \frac{N}{p},\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega),\ 1 \leq q < +\infty.$

Teorema 33. *(**Critério de Compacidade**): Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se, e somente se, toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ tem a propriedade que a sequência $(T(x_n)) \subset Y$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema 34. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n) \subset X$ verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ X,$$

então,

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \ \ em \ \ Y.$$

Lema 8. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, e (u_n), uma sequência de elementos de M, e N_f operador de Nemytskii definido por f. Então,*

$$N_f u_n \longrightarrow N_f u \ \ em \ \ q.t.p$$

se

$$u_n \longrightarrow u \ \ em \ \ q.t.p.$$

Onde M, é o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensuráveis.*

Referências Bibliográficas

[1] Kreyszig, Erwin. **Introductory functional analysis with applications** John Wiley and Sons,United States of America, 1989.

[2] Figueiredo, Djairo,.**Equações diferenciais e aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro,L.T.C 2014.

[3] Lima,Elon Lages . **Análise Real,Volume 1**. 3. ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1997.

[4] Lima,Elon Lages .**Análise Real,Volume 2**. 2. ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1981.

[5] Lima,Elon Lages .**Espaços Métricos**.4. ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides,IMPA 2005.

[6] COSTA, David Goldstein. **Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais**. CNPq-IMPA, 1986.

[7] Haim.Brezis, **Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, University Rutgers, 2010.

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS

Neste livro é feita uma introdução para o estudo de equações elípticas não lineares, o qual são apresentados alguns resultados sobre espaços de Banach e Hilbert e introduzido o método variacional via Teorema de Ambrosetti-Rabinowitz.

José Pastana de Oliveira Neto
Welber Aires de Oliveira

RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
CNPJ: 39.242.488/0001-07
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

9 786558 896074 >