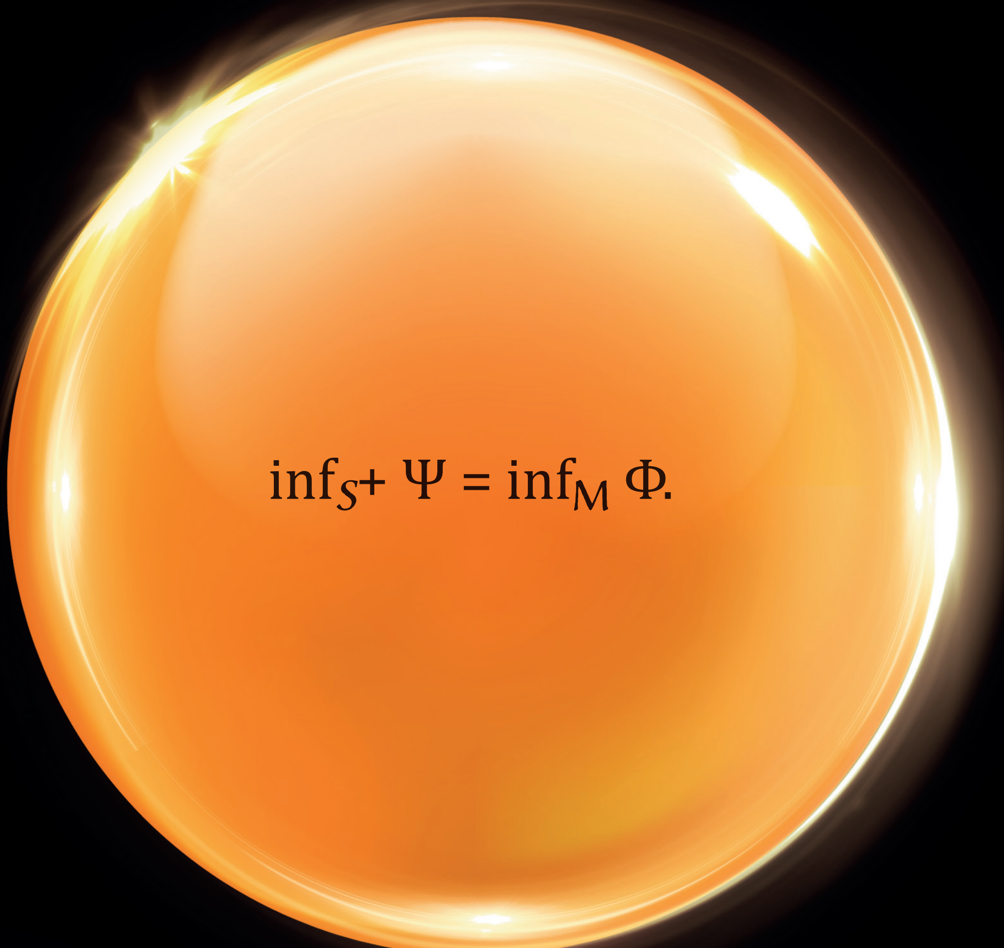
# A Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações




JOSÉ PASTANA

Rfb Editora

**José Pastana de Oliveira Neto**

# A Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações.

Belém-PA
RFB Editora
2023

Todo o conteúdo apresentado neste livro é de responsabilidade do(s) autor(es).
Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição-SemDerivações 4.0 Internacional.

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

*Equipe RFB Editora*

© 2023 Edição brasileira
*by* RFB Editora
© 2023 Texto
*by* Autor
Todos os direitos reservados

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
91 98885-7730
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

**Editor-Chefe**
Prof. Dr. Ednilson Souza
**Diagramação e capa**
Autor
**Revisão de texto**
Autor

**Bibliotecária**
Janaina Karina Alves Trigo Ramos
**Produtor editorial**
Nazareno Da Luz

**Catalogação na publicação**
**RFB Editora**

V299

A Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações / José Pastana de Oliveira Neto. – Belém: RFB, 2023.

Livro em PDF

58p.

ISBN: 978-65-5889-483-4
DOI: 10.46898/rfb.474579e9-daef-430b-99ae-fa2a05a88966

1. Matemática. I. Oliveira Neto, José Pastana de. II. Título.

CDD 510

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática.

## Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA
(Editor-Chefe)
Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA
Profª. Ma. Rayssa Feitoza Felix dos Santos-UFPE
Prof. Me. Otávio Augusto de Moraes-UEMA
Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP
Profª. Ma. Luzia Almeida Couto-IFMT
Profª. Drª. Raquel Silvano Almeida-Unespar
Prof. Me. Luiz Francisco de Paula Ipolito-IFMT
Prof. Me. Fernando Vieira da Cruz-Unicamp
Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA
Profª. Drª. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro
Profª. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves-IFF
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ
Prof. Dr. Rodrigo Luiz Fabri-UFJF
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA
Profª. Ma. Adriana Barni Truccolo-UERGS
Prof. Me. Pedro Augusto Paula do Carmo-UNIP
Prof.ª Drª. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE
Prof. Me. Alisson Junior dos Santos-UEMG
Prof. Me. Raphael Almeida Silva Soares-UNIVERSO-SG
Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné-Faccrei
Prof. Me. Fernando Francisco Pereira-UEM
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos-UEL
Prof. Me. Antonio Santana Sobrinho-IFCE
Prof.ª Drª. Maria de Fatima Vilhena da Silva-UFPA
Profa. Dra. Dayse Marinho Martins-IEMA
Prof. Me. Darlan Tavares dos Santos-UFRJ
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM
Prof.ª Drª. Elane da Silva Barbosa-UERN
Prof. Dr. Piter Anderson Severino de Jesus-Université Aix Marseille

# Dedicatória

Primeiramente a Deus,

a minha família e em especial

a minha mãe Odinea Furtado Correa,

meu pai Francisco Souza de Oliveira

e a minha Companheira Gabriela Coutinho da Cunha.

# Notações e Terminologias

- $\mathcal{N}$ variedade de Nehari;
- $\mathcal{M}$ variedade de Nehari generalizada;
- $\sigma(T)$ o espectro do operador $T$;
- $\to$ convergência forte;
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;
- $\hookrightarrow$ imersão de espaços;
- $f(x,u) = o(u)$ denotará uma função $f$ que é muito pequena comparada à $u$;
- $I'(u) = o(\|u\|)$ denota a derivada de um funcional que é muito pequena comparada à $\|u\|$;
- $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ espaço das funções $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que são localmente $p$-integráveis sobre cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$.

# Prefácio

Neste livro apresentaremos o método da variedade de Nehari generalizada introduzido por Zsulkin e Weth em [10]. Aqui dissertaremos o método de forma didática e clara, onde estaremos interessados em fazer uso do método para resolvermos os três problemas abaixo:

(1) *Existência de solução ground state e Multiplicidade de solução :* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e considere o problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Com $\lambda < \lambda_1$, onde $\lambda_1$ denota o primeiro autovalor de Dirichlet de $-\Delta$ em $\Omega$ e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right) \tag{2}$$

para alguns $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, com $2^* := 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $2^* := \infty$ caso contrário.

(2) *Existencia de Solução ground state:*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Se $V$ é limitada, e $f$ é contínua e satisfaz a condição de crescimento (2), e com funcional

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{4}$$

(3) Por fim concluímos o trabalho estudando a multiplicidade de solução e a existência de solução ground state para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

Com o funcional associado dado por

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \;\text{ para } u = (u_1, u_2) \in E,$$

onde,

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \;\text{ e }\; H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

e ambos satisfazendo a condição de crescimento (2). Encerrando assim as aplicações do trabalho.

**Palavras-chave:** Variedade de Nehari Generalizada, Solução Ground State, Condição Palais-Smale.

# Conteúdo

# Introdução

Neste trabalho estudaremos o método da variedade de Nehari generalizada por Szulkin e Weth em [10] e faremos algumas aplicações. Para a melhor compreensão vamos introduzir brevemente um pouco sobre o método desenvolvido por Szulkin e Weth, para isso seja $E$ um espaço de Banach real uniformemente convexo, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\Phi(0) = 0$. Suponhamos as seguintes condições

(I1) Existe uma função normalização $\varphi$;

$$u \mapsto \psi(u) = \int_0^{\|u\|} \varphi(t)dt \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R}),$$

sendo que $J := \psi'$ é limitado em conjuntos limitados e $J(w)w = 1$ para todo $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$;

(I2) Para cada $w \in E \setminus \{0\}$ existe $s_w$ tal que se $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$, então $\alpha'_w(s) > 0$ para $0 < s < s_w$ e $\alpha'_w(s) < 0$ para $s > s_w$;

(I3) Existe $\delta > 0$ tal que se $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$ e para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset S$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$.

Define-se como a variedade de Nehari o conjunto $\mathcal{N}$ dado por

$$\mathcal{N} := \{u \in E, u \neq 0 : \Phi'(u)u = 0\},$$

As condições acima são essenciais para a existência de um homeomorfismo entre $S$ e $\mathcal{N}$, para obter sobre certas condições uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_S$ e por consequência do homeomorfismo, também garantirá uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_{\mathcal{N}}$. Aqui, neste momento, não nos estenderemos para que possamos conversar melhor mais à frente.

Continuando neste momento introdutório, vamos falar um pouco sobre o método de *Nehari aplicado* pelo matemático israelense Zeev Nehari. Considere $E$ um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, e se $u$ é um ponto crítico de $\Phi$ então $\Phi'(u)u = 0$ para todo $u \in E$. Portanto $u \in \mathcal{N}$. É importante ressaltar que a existência do conjunto $\mathcal{N}$ quando mencionado de modo geral não necessita que tenhamos as condições $(I1) - (I3)$ neste caso estamos olhando simplesmente para o método de Nehari, por Zeev Nehari.

O método de Nehari se resume em minimizar o funcional $\Phi$ sobre $\mathcal{N}$, isto é, obter $u \in \mathcal{N}$;

$$\Phi(u) = c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u)$$

O matemático israelense Zeev Nehari $(1915 - 1978)$, desenvolveu esse método através de dois artigos [6] e [7]. Nesses artigos Nehari considerou uma EDO de segunda ordem em um intervalo $I$ e mostrou a existência de solução não trivial minimizando o funcional sobre $\mathcal{N}$, com $\Phi$ de classe $C^2$ associado ao problema e usou o Teorema da Função Implícita para mostrar que o ponto de mínimo de $\Phi$ em $\mathcal{N}$ era ponto crítico em todo o espaço. Em [7] mostrou a existência de solução com um determinado número de nós em $I$. Desde então o método vem sendo estudado e outros matemáticos foram criando outros métodos como o de fibração por Pohozaev [2].

Pankov em [8] apresenta uma generalização da variedade de Nehari, que denotaremos por $\mathcal{M}$. Ainda supondo o funcional $\Phi$ sendo $C^2$ e a seguinte decomposição ortogonal $E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ com $E$ um espaço de Hilbert. vamos esboçar brevemente o método de Pankov. Ele primeiro mostra que $\mathcal{M}$ é uma variedade $C^1$ e é uma restrição natural no sentindo de que $u$ é ponto crítico não trivial de $\Phi$ se, e somente se, $u \in \mathcal{M}$ e é um ponto crítico de $\Phi|_{\mathcal{M}}$. Uma vez que

$$c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi|_{\mathcal{M}} > -\infty,$$

o princípio variacional de Ekeland produz uma sequência Palais-Smale para $\Phi|_{\mathcal{M}}$ no nível $c$. Pankov então usava o fato de $f \in C^1$ juntamente com

$$|f'_u(x,u)| \leq a(1+|u|^{p-2}) \;\; e \;\; 0 < \frac{f(x,u)}{u} < \theta f'_u(x,u),$$

com $\theta \in (0,1)$ e para todo $u \neq 0$, para mostrar que essa sequencia Paleis-Smale é limitada e encontra um minimizador com os argumentos de concentração e compacidade. Uma vez que não estamos assumindo que $f$ é diferenciável e nem a equação acima, logo $\mathcal{M}$ não precisa ser uma $C^1-variedade$, e com isso o método de Pankov não se aplica. Como contornar então tal dificuldade?

Szulkin e Weth em [10] apresentaram um resultado abstrato, o qual exigia apenas que o funcional fosse $C^1$ e tinham mínimo local em 0, e $\Phi = I_0 - I$ com $I_0$ homogêneo e o $I$ completamente contínuo onde apresentaram varias aplicações. Onde não exigiam mais que o funcional fosse $C^2$ mas apenas $C^1$, no mesmo trabalho apresentaram a versão generalizada da variedade de Nahari, agora com $\Phi$ sendo $C^1$, este foi o material base para o desenvolvimento da dissertação. Faremos resultados importantes sobre a variedade $\mathcal{M}$, que nos garantiram multiplicidade de pares de pontos críticos na mesma, que será nossas soluções dos problemas $(1), (3)$ e $(5)$ apresentados no resumo.

Vamos agora conversar um pouco sobre o método utilizado. Uma vez que $\Phi$ é $C^1$ não garantimos que $\mathcal{M}$ é uma variedade $C^1$, no entanto ainda continua sendo uma variedade topológica. Contornamos essa dificuldade em não poder aplicar o método de Pankov quando garantimos a existência de uma correspondência bijetiva entre pontos críticos de $\Phi|_{S^+}$ com à variedade $\mathcal{M}$ através de um homeomorfismo, com

$$S^+ := S \cap E^+ = \{u \in E^+ : \|u\| = 1\}.$$

E $S^+$ é uma subvariedade $C^1$, vemos este fato em Szulkin [11]. Uma vez que $\Phi|_{S^+}$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição Paleis-Smale-(PS), assim garantimos uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_{S^+}$, pelo homeomorfismo também garantimos sobre $\mathcal{M}$, no momento em que provamos que o funcional $\Phi$ satisfaz a condição Paleis-Smale sobre $\mathcal{M}$. A apresentação deste homeomorfismo será feita na Proposição 1.1 do trabalho.

Supondo $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ e a decomposição $E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$, onde $\dim E^0 < \infty$, e $\Phi$ satisfazendo:

**(A1)** $\Phi(u) = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u)$, onde $I(0) = 0$, $\frac{1}{2}I'(u)u > I(u) > 0$ para todo $u \neq 0$ e $I$ é fracamente semicontínuo inferiormente;

**(A2)** Para cada $w \in E \setminus F$, existe um único ponto crítico não trivial $\widehat{m}(w)$ de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. Além disso, $\widehat{m}(w)$ é o único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$

**(A3)** Existe $\delta > 0$ tal que $||\widehat{m}(w)^+|| \geq \delta$, para todo $w \in E \setminus F$, e para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset E \setminus F$, existe uma constante $C_{\mathcal{W}}$ tal que $||\widehat{m}(w)|| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Para assim definirmos a variedade de Nehari generalizada como

$$\mathcal{M} = \{u \in E \setminus (E^0 \oplus E^-) : \Phi'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in (E^0 \oplus E^-)\}.$$

que será o nosso conjunto onde queremos soluções.

O resultado principal do capitulo 1 o seguente Teorema:

**Teorema 0.1** *Supondo que $\Phi$ satisfaz (A1), (A2) e*

**(i)** $I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;

**(ii)** $I(su)/s^2 \to \infty$ uniformemente para $u$ em um subconjunto fracamente compacto de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;

**(iii)** $I'$ é completamente contínua.

Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem tem uma solução **ground state**. Além disso, se $I$ for par, então está equação tem infinitos pares de soluções.

Nossa primeira aplicação do método é o problema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e considere o problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Com $\lambda < \lambda_1$, onde $\lambda_1$ denota o primeiro autovalor de Dirichlet de $-\Delta$ em $\Omega$ e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right) \tag{7}$$

para alguns $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, com $2^* := 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $2^* := \infty$ caso contrário. Tendo assim o seguinte funcional associado

$$\Phi(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Neste problema garantiremos uma infinidade de pares de soluções ground state fazendo uso do Teorema acima, para aplicarmos o método precisamos que $\Phi$ satisfaça $(A1), (A2)$ e $(A3)$. Este fato começa em escrevermos o funcional associado ao problema como em $(A1)$, isto é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u).$$

A próxima aplicação que será exposta no capitulo 3 é a equação não linear de Schrödinger com um Potencial $V$ no $\mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Se $V$ é limitada, e $f$ é contínua e satisfaz a condição de crescimento dada, e com o funcional associado

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{9}$$

Em [12] Szulkin e Weth mostram que se $f$ é impar em $u$, e adicionando a condição de Ambrosseti-Rabinovitz então o problema não linear de Schrödinger tem uma infinidade de soluções geometricamente distintas, no entanto aqui vamos apenas provar a existência de uma solução de estado fundamental via minimização em $\mathcal{M}$, fazendo uso de resultado de concentração e compacidade, e claro sem esquecermos de mostrar que o funcional em (14) satisfaz $(A1), (A2)$ e $(A3)$. Em outra palavras se resumirá em demonstrar o seguente Teorema:

**Teorema 0.2** *Supondo* $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo* (2.6)

**(i)** $V$, $f$ *são 1-periódicas em* $x_1, ..., x_N$, $0 \in \sigma(-\Delta + V)$ *e* $\sigma(-\Delta+V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$,

**(ii)** $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* $x$ *quando* $u \to 0$,

**(iii)** $u \to f(x,u)/|u|$ *está crescendo estritamente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, \infty)$

**(iv)** $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* $x$ *quando* $|x| \to \infty$

*Então o problema* (8) *possui uma solução ground state.*

Em suma, no capitulo 4 vamos apresentar nossa ultima aplicação do método que será o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Com o funcional associado dado por

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad \text{para } u = (u_1, u_2) \in E,$$

onde,

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad \text{e} \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

Nesta aplicação vamos garantir a multiplicidade de soluções ground state, fazendo uso fortemente do Teorema 0.1 acima, de maneira semelhante à primeira aplicação dada em (6). Concluindo assim as nossas aplicações do método.

# Capítulo 1

# A Variedade de Nehari Generalizada

Neste capitulo, vamos começar apresentando a variedade de Nehari generalizada segundo Szulkin e Weth em [10]. Neste momento vamos supor três condições de suma importância para o desenvolvimento do método, que são $(A1) - (A3)$, onde serão definidas em breve. De modo geral este método se resume em fazer uso de um homeomorfismo entre a esfera unitária em um espaço de Banach reflexivo com a variedade de Nehari. Agora, com este método suponhamos que o funcional $\Phi$ seja apenas $C^1$, e uma vez que não estamos supondo o funcional $C^2$ a variedade de Nehari não será uma variedade de classe $C^1$ ou $C^1$-variedade, mas ainda sim será uma variedade topológica, neste caso uma variedade simples, ou $C^0$-variedade. E para contornar esta dificuldade usasse fortemente o fato da esfera unitária em um espaço de Banach de dimensão infinita ser uma $C^1$-subvariedade, onde pode ser visto em [11].

Ao longo deste trabalho, supomos que $E$ é um espaço de Hilbert e com a seguinte decomposição ortogonal

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^- \equiv E^+ \oplus F, \quad F = E^0 \oplus E^- \qquad (dimE^0 < +\infty), \tag{1.1}$$

assim, se $u \in E$, podemos escrever

$$u = u^+ + u^0 + u^- = u^+ + v$$

onde $u^{+,0,-} \in E^{+,0,-}$ respectivamente, em que $u^{+,0,-}$ não denotará a parte positiva, nula ou negativa de $u$ e $v \in F$.

Seja agora a esfera unitária definida por

$$S^+ \equiv S \cap E^+ = \{u \in E^+ : ||u|| = 1\},$$

da decomposição de $E$ podemos definir os seguintes espaços

$$E(u) = \mathbb{R}u \oplus F \equiv \mathbb{R}u^+ \oplus F \quad \text{e} \quad \widehat{E}(u) = \mathbb{R}^+u \oplus F \equiv \mathbb{R}^+u^+ \oplus F, \tag{1.2}$$

com, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Seja $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. Vamos fazer algumas suposições sobre $\Phi$:

**(A1)** $\Phi(u) = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u)$, onde $I(0) = 0$, $\frac{1}{2}I'(u)u > I(u) > 0$ para todo $u \neq 0$ e $I$ é fracamente semicontínuo inferiormente;

**(A2)** Para cada $w \in E \setminus F$, existe um único ponto crítico não trivial $\widehat{m}(w)$ de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. Além disso, $\widehat{m}(w)$ é o único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$

**(A3)** Existe $\delta > 0$ tal que $||\widehat{m}(w)^+|| \geq \delta$, para todo $w \in E \setminus F$, e para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset E \setminus F$, existe uma constante $C_{\mathcal{W}}$ tal que $||\widehat{m}(w)|| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Definamos como a variedade de Nehari generalizada o seguinte conjunto $\mathcal{M}$, dado por:

$$\mathcal{M} = \{u \in E \setminus (E^0 \oplus E^-) : \Phi'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in (E^0 \oplus E^-)\}.$$

Para esse momento de definições vamos recordar as definições de sequência (PS) e condição (PS). Para isso, seja $X$ um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1$.

**Definição 1.1** *Dizemos que* $(u_n) \subset X$*, é uma sequência* ***Palais-Smale-(PS)****, no nível c, denotada por* $(PS)_c$ *quando*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0.$$

**Definição 1.2** *Dizemos que* $\Phi$ *verifica a condição de (PS), quando toda sequência* $(PS)_c$ *para* $c \in \mathbb{R}$*, admite uma subsequência que converge forte em* $X$*, isto é,*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

*existem* $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ *e* $u_0 \in X$ *tal que*

$$u_{n_k} \to u_0 \quad em \quad X.$$

Mais à frente no Lema 1.1 item $(iii)$ mostraremos quando a variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$, coincide com a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ apresentada por Szulkin e Weth em [1].

Observemos que se $\Phi$ é $C^1$ não garantimos que $\mathcal{M}$ é uma $C^1$-variedade, pois de modo geral, a variedade de Nehari é uma variedade simples ou seja, apenas $C^0$-variedade. Mas contornaremos essa dificuldade quando provarmos a existência de um homeomorfismo $m$ entre $S^+$ e $\mathcal{M}$. Teremos aí uma correspondência bijetiva entre os pontos críticos de $\Phi$ restrito a $S^+$ com a $\mathcal{M}$, e uma vez que $\Phi|_{S^+}$ é $C^1$, limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS), então $\Phi|_{S^+}$ possui uma infinidade de pares de pontos críticos sobre $S^+$, e relacionamos tais pontos críticos de $\Phi$ sobre a esfera $S^+$, com os que pertencem a variedade quando provarmos que o funcional satisfaz a condição (PS) também na variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$.

Apresentaremos neste momento o primeiro Lema desde trabalho o qual será muito usado no decorrer do desenvolvimento do método. É importante frisar que o item (iii) do Lema abaixo diz quando a variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$ coincide com a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ apresentada na introdução. Pois quando $F = \{0\}$, então $(A2)$, $(A3)$ serão equivalentes a $(I2)$, $(I3)$ e $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

**Lema 1.1** *Suponha $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e as hipóteses $(A1) - (A3)$. Então,*

*(i) Se $u \neq 0$ e $\Phi'(u) = 0$ então $\Phi(u) > 0$;*

*(ii) Por (A2) segue $\widehat{E}(w) \cap \mathcal{M} = \{\widehat{m}(w)\}$;*

*(iii) Dado $t > 0$ temos $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw)$ e por consequência imediata $F = \{0\}$.*

***Demonstração:*** *i) Se $u \neq 0$ e $\Phi'(u) = 0$ então*

$$\Phi(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u) - \frac{1}{2}\left[||u^+||^2 - ||u^-||^2 - I'(u)u\right]$$
$$= \frac{1}{2}I'(u)u - I(u) > 0,$$

*onde a ultima desigualdade acima segue da hipótese $(A1)$.*

*ii) Seja $z \in \mathcal{M} \cap \widehat{E}(w)$, daí $z = tw^+ + v$ e ainda por $\mathcal{M}$*

$$\Phi'(tw^+ + v)(tw^+ + v) = 0,$$

*pela linearidade*

$$t\Phi'(tw^+ + v)w^+ + \Phi'(tw^+ + v)v = 0,$$

*logo,*

$$\Phi'(tw^+ + v)w^+ = 0.$$

*Dessa forma, $z$ é um ponto crítico não trivial de $\Phi$ restrito a $\widehat{E}(w)$, Resta estender para todo $\widehat{E}(w)$. Para isso, seja $t > 0$ e $m(w) = sw^+ + n \in \widehat{E}(w)$ com $n \in F$ ainda teremos,*

$$\Phi'(tw^+ + v)(sw^+ + n) = s\Phi'(tw^+ + v)w^+ + \Phi'(tw^+ + v)n = 0.$$

*Agora sim, pela unicidade em (A2) para $\Phi$ restrito à $\widehat{E}(w)$ concluímos $m(w) = z = \widehat{m}(w)$. Mostrando ii).*

*iii) Este item é direto da definição de $\widehat{E}(w)$. Basta notarmos*

$$\widehat{E}(w) = \mathbb{R}^+ w \oplus F \equiv \mathbb{R}^+ w^+ \oplus F = t\mathbb{R}^+ w^+ \oplus tF = \widehat{E}(tw),$$

*em particular,*

$$\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw),$$

*concluindo a demonstração.*

$$\blacksquare$$

**Lema 1.2** *Seja* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e* $E$ *um espaço de Hilbert com a decomposição* (1.1), *então:*

(*i*) $d(\mathcal{M}, F) > 0$;

(*ii*) *A variedade de Nehari generalizada* $\mathcal{M}$ *é fechada.*

***Demonstração:*** (*i*) *Primeiramente vamos mostrar que* $\mathcal{M}$ *está afastada de* $F$. *Seja então* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w)^+ + z \in \mathcal{M}$ *com* $z \in F$, *daí segue,*

$$\|\widehat{m}(w) - v\| = \|\widehat{m}(w)^+ + z - v\| = \|\widehat{m}(w)^+\|_{E^+} + \|z - v\|_F,$$

*passando o ínfimo sobre* $F$ *na igualdade anterior, temos* $d(\mathcal{M}, F) > 0$, *pois*

$$\inf_{v \in F} \|z - v\|_F = d(z, F) = 0 \text{ e por (A3) } \|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta.$$

(*ii*) *Vamos agora mostrar que* $\mathcal{M}$ *é fechada. Com efeito, é suficiente notar que a variedade pode ser escrita* $\mathcal{M} = A \cap B$ *com* $A$ *e* $B$ *fechados. Para isso, consideremos*

$$A = \left\{\varphi^{-1}(0)\right\} \quad \text{com} \quad \varphi(u) = \Phi'(u)u.$$

$A$ *é claramente fechado. Por outro lado precisamos estender para toda* $\mathcal{M}$ *vamos então definir* $B$ *olhando para* $F$ *que será a segunda parte da definição de* $\mathcal{M}$, *com*

$$B = \bigcap_{v \in F} B_v \quad \text{onde} \quad B_v = \left\{\varphi_v^{-1}(0)\right\}, \ \text{com} \quad \varphi_v(u) = \Phi'(u).v \ \forall \ v \in F.$$

*Uma vez que cada* $B_v$ *é fachado,* $B$ *é fechado. Portando* $\mathcal{M}$ *é fechada.*

**Lema 1.3** *Seja* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e* $E$ *um espaço de Hilbert com a decomposição* (1.1), *e suponhamos as hipóteses* $(A1) - (A3)$ *então:*

*(i)* $t_{\frac{w}{\|w\|}} = \|w\|tw$ *para todo* $t > 0$*;*

*(ii)* *Se* $w \in \mathcal{M}$ *então* $t_w = 1$ *e* $v_w = 0$*, isto é,* $w = \widehat{m}(w)$*;*

*(iii)* $t_{w^+} = t_w$ *e* $v_{w^+} = v_w$*, para todo* $w \in E \setminus F$*, ou seja,* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+)$*.*

***Demonstração:*** *(i) Desde que* $\widehat{m}(tw) = \widehat{m}(w)$*, para todo* $t > 0$ *e para todo* $w \in E \setminus F$*, concluímos que, para* $t = \frac{1}{\|w\|} > 0$*, obtemos*

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} \left(\frac{w}{\|w\|}\right)^+ + v_{\frac{w}{\|w\|}} = t_w w^+ + v_w.$$

*donde*

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} \frac{w^+}{\|w\|} = t_w w^+.$$

*Passando a norma em ambos os membros acima, segue*

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} = \|w\|.t_w.$$

*Mostrando (i).*

*(ii) É suficiente mostrar que se* $w \in \mathcal{M}$ *então* $w$ *é ponto crítico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$*. Com efeito, notemos que*

$$w \in \widehat{E}(w),$$

*pois*

$$w = 1w + 0.$$

*Por outro lado, da definição de* $\mathcal{M}$*,*

$$\Phi'(w)(tw + v) = t\Phi'(w)w + \Phi'(w)v = 0,$$

*para quaisquer* $t > 0$ *e* $v \in F$*. Mostrando que* $w$ *é ponto crítico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$*, e pelo Lema 1.2 item (ii) sabemos que* $\widehat{m}(w)$ *é o único ponto critico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$*, assim concluímos* $w = \widehat{m}(w)$*, provando (ii).*

*(iii) Agora é suficiente mostrarmos que*

$$\widehat{E}(w) = \widehat{E}(w^+) \tag{1.3}$$

*Esta última igualdade é uma consequência imediata da definição de* $\widehat{E}(w)$. *Uma vez que* $\widehat{m}(w)$ *é o único ponto crítico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$, *concluímos de (1.3) que* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+)$. ■

*É importante notarmos também que*

$$\widehat{E}(\mathbb{R}^+ w) = \widehat{E}(\mathbb{R}^+ w^+) = \widehat{E}(w) = \widehat{E}(w^+).$$

*Seja as aplicações,* $\widehat{m} : E \setminus F \to \mathcal{M}$ *e* $m : S^+ \to \mathcal{M}$, *com*

$$m = \widehat{m}|_{s^+} \quad e \quad \widehat{m}(w) = t_w w^+ + v_w$$

*Agora já estamos em condições de apresentarmos a Proposição* 1.1, *talvez não a mais importante deste trabalho, mas a que representa o método. Onde consiste na construção do homeomorfismo entre a esfera unitária* $S^+$ *e a variedade de Nehari generalizada* $\mathcal{M}$.

**Proposição 1.1** *Suponha que* $\Phi$ *satisfaz (A1)-(A3), então:*

**(a)** *a aplicação* $\widehat{m}$ *é contínua*

**(b)** *a aplicação* $m$ *é um homeomorfismo sobre a* $S^+$ *e* $\mathcal{M}$

***Demonstração:*** *(a) Supondo* $(w_n) \subset E \setminus F$, $w_n \to w \notin F$. *Desde que*

$$\widehat{m}(w) = \widehat{m}\left(\frac{w^+}{\|w^+\|}\right),$$

*assumimos sem perda de generalidade que* $w_n \in S^+$. *É suficiente mostrar que*

$$\widehat{m}(w_n) \longrightarrow \widehat{m}(w)$$

*a menos de subsequência. Escrevendo,*

$$\widehat{m}(w_n) = s_n w_n + v_n = s_n w_n + v_n^0 + v_n^-. \tag{1.4}$$

*Por (A3), $(\widehat{m}(w_n))$ é limitada, assim passando uma subsequência $s_n \to \overline{s}$ acima vem*

$$s_n w_n + v_n^0 + v_n^- \rightharpoonup \overline{s}w + v_*^0 + v_*^-, \qquad v_* = v_*^0 + v_*^-$$

*considerando $\widehat{m}(w) = sw + v$, decorre de (A2) que*

$$\Phi(\widehat{m}(w_n)) \geq \Phi(sw_n + v) \to \Phi(sw + v) = \Phi(\widehat{m}(w)); \tag{1.5}$$

*e pela semi-continuidade inferior fraca da norma e de $I$, e usando o fato de $\|w_n\| = 1$, segue*

$$\begin{aligned}\Phi(\widehat{m}(w)) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}s_n^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - I(\widehat{m}(w_n))\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\overline{s}^2 - \frac{1}{2}\|v_*^-\|^2 - I(\overline{s}w + v_*) \qquad (1.6)\\ &\leq \Phi(\widehat{m}(w))\\ &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - I(sw + v).\end{aligned}$$

*Combinando (1.5) com (1.6) temos*

$$\Phi(\widehat{m}(w)) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) \leq \Phi(\widehat{m}(w)),$$

*no que segue,*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) = \Phi(\widehat{m}(w)). \tag{1.7}$$

*Com isso já temos a continuidade de $\widehat{m}$ pois, devido (A2), $\widehat{m}(w)$ é único, daí $\overline{s} = s$ e $v_* = v$, então $s_n \to s$, e $v_n^- \to v^-$ e desde que $dim E^0 < \infty$ temos $v_n^0 \to v^0$. Observe que se fosse $v_n \rightharpoonup v^-$ consequentemente $\Phi(\widehat{m}(w_n) \rightharpoonup \Phi(\widehat{m}(w))$, contradizendo (1.7).*

*(b) Esta parte é uma consequência direta do lema anterior. Queremos mostrar que $m = \widehat{m}|_{S^+}$ e $m^{-1} : \mathcal{M} \to S^+$ definida por*

$$u \longmapsto \frac{u^+}{\|u^+\|}$$

*são inversas uma da outra. É claro que*

$$m^{-1}(m(u)) = \frac{m(u)^+}{\|m(u)^+\|} = \frac{t_u u}{\|t_u u\|} = \frac{u}{\|u\|} = u,$$

*pois* $u \in S^+$, *logo* $\|u\| = 1$ *e* $u = u^+$. *Vamos agora mostrar que* $m(m^{-1}(w)) = w$ *para todo* $w \in \mathcal{M}$. *Aqui vamos fazer uso do lema anterior itens (ii) e (iii) e o fato de que* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw)$ *para* $t > 0$. *Com efeito,*

$$m(m^{-1}(w)) = \widehat{m}\left(\frac{w^+}{\|w^+\|}\right) = \widehat{m}(w^+) = \widehat{m}(w) = w$$

*Concluindo a demonstração.*

∎

*Seja agora as seguintes aplicações,* $\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *e* $\Psi : S \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\Psi = \widehat{\Psi}|_{S^+} \quad e \quad \widehat{\Psi}(w) := \Phi(\widehat{m}(w))$$

**Proposição 1.2** *Suponha que* $\Phi$ *satisfaz (A1)-(A3). Então,* $\widehat{\Psi} \in C^1(E^+\setminus\{0\}, \mathbb{R})$ *com*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z \quad \textit{para todo } w, z \in E^+,\ w \neq 0.$$

***Demonstração:*** *Seja* $w$ $E^+ \setminus \{0\}$, $z \in E^+$ *e considerando* $\widehat{m}(w) = s_w w + v_w$, *e* $v_w \in F$. *Agora temos*

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w + tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(s_{w+tz}(w + tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_w w + v_w) \\
&\leq \Phi(s_{w+tz}(w + tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_{w+tz} w + v_{w+tz}) \\
&= \Phi'(s_{w+tz}(w + \tau_t tz) + v_{w+tz}) s_{w+tz} tz
\end{aligned}$$

*para todo* $|t|$ *suficientemente pequeno e* $\tau_t \in (0, 1)$. *Note agora,*

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w + tz) - \widehat{\Psi}(w) &\geq \Phi(s_w(w + tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_w w + v_w) \\
&= \Phi'(s_w(w + \eta_t tz) + v_{w+tz}) s_w tz
\end{aligned}$$

*com* $\eta_t \in (0,1)$, *daí*

$$\Phi'(s_w(w+\eta_t tz)+v_{w+tz})s_w tz \leq \widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w) \leq \Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz)+v_{w+tz})s_{w+tz}tz;$$

*pela continuidade de* $s_w$ *e por* $\Phi$ *ser* $C^1$, *temos*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w)}{t} = s_w\Phi'(s_w w+v_w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

$\blacksquare$

*Como consequência disto temos o seguinte corolário no qual já começamos a preparar os conceitos necessários para a conclusão do nosso método estudado quando provarmos a Proposição* 1.3 *mais à frente, garantindo que o funcional* $\Phi$ *sobe algumas hipóteses necessárias satisfaz a condição Palais-Smale-(PS) sobre a variedade de Nehari generalizada* $\mathcal{M}$.

**Corolário 1.1** *Supondo* $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ *e satisfazendo (A1)-(A3). Então:*

**(a)** $\Psi \in C^1(S^+,\mathbb{R})$ *e*

$$\Psi'(w)z = \|\widehat{m}(w)^+\|\Phi(m(w))z \text{ para todo } z \in T_w(S^+).$$

**(b)** *Se* $(w_n)$ *é uma sequencia Palais-Smale-(PS) para* $\Psi$, *então* $m((w_n))$ *é uma sequência (PS) para* $\Phi$. *Se* $(u_n) \in \mathcal{M}$ *é uma sequência (PS) limitada para* $\Phi$, *então* $m^{-1}(u_n)$ *é (PS) para* $\Psi$.

**(c)** *Se* $w$ *é um ponto crítico para de* $\Psi$ *se, e somente se,* $m(w)$ *é um ponto crítico não-trivial de* $\Phi$. *Consequentemente os valores de* $\Psi$ *e* $\Phi$ *coincidem e* $\inf_{S^+}\Psi = \inf_{\mathcal{M}}\Phi$.

**(d)** *Se* $\Phi$ *é par, então* $\Psi$ *também.*

***Demonstração:*** *(a) Se* $w \in S^+$, *então* $\|w\| = 1$ *e usando a Proposição 1.2, (a) é verificado.*

*(b) Primeiramente notemos que pela definição de* $\Psi$ *segue que* $\Psi(w_n)$ *é limitada se, e somente se,* $\Phi(m(w))$ *for limitada. Agora fazendo a decomposição* $E = T_w(S^+) \oplus E(w)$ *para todo* $w \in S^+$ *e escrevendo* $u = m(w)$ *segue,*

$$\|\Psi'(w)\| = \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Psi'(w)z = \|u^+\| \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Phi'(u)z = \|u^+\| \|\Phi'(u)\|_*, \qquad (1.8)$$

*a conclusão de (b) é direto da igualdade* (1.8) *acima, onde a ultima igualdade na mesma segue do fato de*

$$\|\Phi'(u)\|_* = \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Phi'(u)z + \sup_{\substack{v \in E(w) \\ \|v\|=1}} \Phi'(u)v,$$

*pois* $\Phi'(u)v = 0$ *para todo* $v \in E(w)$ *e por* $E(w)$*. Com efeito, dado* $v \in \widehat{E}(w)$ *segue,*

$$v = sw + v' \quad com \;\; w \in S^+,\; s \in \mathbb{R} \;\; e\; v' \in F,$$

*com isso,*

$$\begin{aligned} \Phi'(u)v = \Phi'(u)(sw + v') &= s\Phi'(u)w + \Phi'(u)v' \\ &= s\Phi'(u)m^{-1}(m(w)) \\ &= \frac{s}{\|m(w)^+\|}\Phi'(u).\widehat{m}(w) = 0. \end{aligned}$$

*Desde que* $\|u^+\| \geq \delta > 0$ *para todo* $u \in \mathcal{M}$ *concluímos a prova.*

*(c) é direto da igualdade* (1.8)*.*

*(d) Se* $\Phi$ *é par, então* $\Psi$ *será, pois*

$$\Psi(w) := \Phi(sw) = \Phi(-sw) := \Psi(-w).$$

*Concluindo a demonstração.* ■

*Consequência imediata deste corolário é o próximo lema que garante que o ínfimo de* $\Phi$ *sobre* $\mathcal{M}$ *tem a seguinte caracterização:*

**Lema 1.4** *Seja $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ e satisfazendo $(A1)-(A3)$ então:*

$$c := \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u).$$

***Demonstração:*** *Desde que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$ para todo $w \in E\setminus F$ temos,*

$$\inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u). \tag{1.9}$$

*Da definição de $\Psi$, segue*

$$\inf_{w\in S^+} \Psi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u), \tag{1.10}$$

*combinando (1.9) e (1.10) e pelo corolário anterior item c), temos*

$$\inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u)$$

■

**Proposição 1.3** *Supondo que $\Phi$ satisfaz (A1), (A2) e também*

**(i)** *$I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;*

**(ii)** *$I(su)/s^2 \to \infty$ uniformemente para $u$ em um subconjunto fracamente compacto de $E\setminus\{0\}$ quando $s\to\infty$;*

**(iii)** *$I'$ é completamente contínua.*

*Então $\Phi$ satisfaz a condição (PS) na $\mathcal{M}$.*

***Demonstração:*** *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência (PS). Dessa forma*

$$\Phi(u_n) \leq d,$$

*para algum $d > 0$ e*

$$\Phi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

*Se* $(u_n)$ *é ilimitada, definamos*

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

*Passando para uma subsequência, podemos assumir*

$$\|u_n\| \longrightarrow \infty \quad e \quad v_n \rightharpoonup v,$$

*pois* $S$ *é fracamente compacta. Segue-se de (ii) que se* $v \neq 0$*, temos*

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} \tag{1.11}$$

*com a parte direita acima indo para* $-\infty$*. Consequentemente* $v = 0$*. Por* (1.11),

$$\frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 + \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2}$$

*e como* $I > 0$*, vem*

$$\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\|.$$

*Assim, se* $v_n^+ \to 0$ *então* $v_n^- \to 0$*, e portanto,*

$$\|v_n^0\|^2 = 1 - \|v_n^+\|^2 - \|v_n^-\|^2 \longrightarrow 1.$$

*Como* $dim E^0 < \infty$ *então* $v_n^0 \to v^0 \neq 0$ *então* $v \neq 0$ *contradição. Portanto*

$$v_n^+ \nrightarrow 0$$

*e assim,*

$$\|v_n^+\| \geq \alpha \quad \forall\ n \text{ e algum } \alpha > 0,$$

*a menos de subsequência. Completamos a prova da limitação de* $u_n$*, observando que*

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(s_{v_n^+} v_n^+) \geq \Phi(s v_n^+) \geq \frac{1}{2}\alpha^2 s^2 - I(s v_n^+) \to \frac{1}{2}\alpha^2 s^2, \tag{1.12}$$

*para todo* $s > 0$*, contradição pois para* $s > (2d)^{\frac{1}{2}}/\alpha$ (1.12) *não é valida. Portanto* $(u_n)$ *é limitada e*

$$\Phi'(u_n) = u_n^+ - u_n^- - I'(u_n) \to 0.$$

*Uma vez que $I'$ é completamente contínuo e dim $E^0 < \infty$, a convergência acima está bem definida e $(u_n)$ possui uma subsequencia convergente.*

$\blacksquare$

*Faremos aqui o Teorema principal da teoria do método estudado, no qual garantirá sobe certas hipérteses uma infinidades de pares de soluções para algumas aplicações abordas nos próximos capítulos. Para isso vamos apresentar a seguinte definição*

**Definição 1.3** ***Solução Ground State***. *Defina,*

$$c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u).$$

*Seja $\Phi \in C^1(E, R)$. Um ponto crítico $u \neq 0$ de $\Phi$; $\Phi(u) = c$ é chamado de ponto crítico de menor energia, ou também de Solução* ***Ground State***.

**Teorema 1.1** *Supondo que $\Phi$ satisfaz (A1), (A2) e*

**(i)** *$I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;*

**(ii)** *$I(su)/s^2 \to \infty$ uniformemente para $u$ em um subconjunto fracamente compacto de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;*

**(iii)** *$I'$ é completamente contínua.*

*Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem tem uma solução* ***ground state***. *Além disso, se $I$ for par, então está equação tem infinitos pares de soluções.*

***Demonstração:*** *Vamos mostrar que (A3) é satisfeita. Se não acontecesse, existiria uma sequência $\delta_n = 1/n$ e $w_n \in S_\rho(0) \cap E^+$ tais que $s_n < 1/n$, com $\widehat{m}(w) = sw$ daí*

$$0 = \Phi'(s_n(w_n)) = (s_n)\|(w_n)^+\|^2 - I'(s_n(w_n)^+)w_n = s_n\rho^2 - I'(s_n(w_n)^+)w_n.$$

*Assim,*

$$\rho^2 = \frac{I'(s_n(w_n)^+)w_n}{s_n},$$

*dessa forma, como* $\rho = \|w_n\|$, *seque*

$$\rho = \frac{I'(s_n(w_n)^+)w_n}{s_n\|w_n\|} \leq \frac{\|I'(s_n(w_n)^+)w_n\|}{s_n\|w_n\|} = 1 \tag{1.13}$$

*contradizendo (i). Com isso deve existir* $\delta > 0$ *tal que* $\|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta$ *para todo* $w \in E \setminus F$. *Como* $E$ *é Hilbert, logo reflexivo,* $S^+$ *é fracamente compacta. Por outro lado se existisse uma* $w_n \in \mathcal{W} \subset S^+$ *tal que* $\|\widehat{m}(w_n)\| > n$ *para todo* $n$ *natural e por sua vez* $(r_n)$ *ilimitada. Teríamos novamente (1.12), temos ainda por (A1)*

$$\frac{I(r_n w_n)}{r_n^2} \leq \frac{I'(r_n(w_n)^+)w_n}{r_n^2} \leq \frac{I'(r_n(w_n)^+)w_n}{r_n} = \rho^2.$$

*O que contradiz (ii). Portanto (A3) é satisfeita.*

*Desde que* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+/\|w^+\|)$ *para todo* $E \setminus F$, *isto também é verdade para o compacto* $\mathcal{W}$. *Também notemos* $c := \inf_{\mathcal{M}} \Phi \geq \eta > 0$, *para algum* $\eta > 0$, *pois de forma natural* $\Phi(w) \geq \eta$, *com* $w \in S_\rho(0) \cap E^+$.

*Pela Proposição 1.3, e seja* $(w_n)$ *uma sequência (PS), com* $u_n = m(w_n) \in \mathcal{M}$ *então pelo Corolário 1.1* $(u_n)$ *é (PS) para* $\Phi$, *como* $\Phi$ *satisfaz a condição (PS) em* $\mathcal{M}$ *temos* $u_n \to u$ *na variedade a menos de subsequência, com isso,* $w_n \to m^{-1}(u)$, *então* $\Psi$ *satisfaz a condição (PS), daí* $\Psi'(w_n) \to 0$ *e pela condição (PS)* $w_n \to w$, *depois de passar uma subsequência, logo* $w$ *é minimizador de* $\Psi$ *ou seja,*

$$\Psi(w) = \Phi(m(w)) = \Phi(u) = \inf_{w \in S^+} \Psi(w) = \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u) \ \text{e}\ \Psi'(w) = 0,$$

*Dessa forma,* $u$ *é solução ground state da equação* $\Phi'(u) = 0$, *e pelo Corolário 1.1* $m(w) = u$ *é crítico não-trivial de* $\Phi$.

*Agora, se* $I$ *é Par por (A1),* $\Phi$ *também é, pelo Corolário 1.1 novamente,* $\Psi$ *também será.*

*Novamente pelo Corolário 1.1,* $0 < \inf_{S^+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} \Phi$, *consequentemente* $\Psi$ *é limitada inferiormente. Em suma, pela limitação inferior sobre* $S^+$ *e pela condição (PS)* $\Psi$ *tem infinitos pares de pontos críticos, ver Teorema A.1 e novamente pelo Corolário 1.1 temos infinitos pares de soluções não triviais.*

■

*Concluímos aqui o método da variedade de Nehari Generalizada, e as ferramentas fundamentais para iniciarmos nossas aplicações.*

# Capítulo 2

# Problema de autovalor

*Neste capitulo estamos interessados em investigar o seguinte problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

*com* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado, e* $\lambda \geq \lambda_1$, $\lambda_1$ *denota o primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira Dirichlet e* $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo:*

$(f_1)$ *Com* $a > 0$ *e* $2 < q < 2^*$, *com* $2^* := 2N/(N-2)$ *se* $N \geq 3$ *e* $2^* := \infty$ *caso contrário, tais que*

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right),$$

$(f_2)$ $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* $x$ *quando* $u \to 0$,

$(f_3)$ $u \to f(x,u)/|u|$ *é estritamente crescente,*

$(f_4)$ $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* $x$ *quando* $|u| \to \infty$.

*Para aplicarmos o método da variedade de Nehari generalizada, vamos definir primeiramente algumas notações,* $E = H_0^1(\Omega)$ *com*

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$$

*a decomposição ortogonal correspondente ao espectro de $\Delta - \lambda$ em $E$. Mais precisamente, denotamos os autovalores de $-\Delta$ por $\lambda_1, \lambda_2, ...$ e um conjunto ortogonal em $E$ correspondente por cada autofunção $e_i$ do autovalor $\lambda_i$ que gera o subespaço ortogonal $E^-$, e de maneira análoga para o subespaço $E^0$. Para isso, supondo $\lambda_k < \lambda = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_m < \lambda_{m_{m+1}}$, onde $1 \leq k < m$. Então*

$$E^- = span\{e_1, ..., e_k\} \;\; e \;\; E^0 = span\{e_{k+1}, ..., e_m\}.$$

*Também admitimos o caso $k = 0$ e $k = m \geq 1$ que correspondem respectivamente a $E^- = \{0\}$ e $E^0 = \{0\}$. Tendo em vista esta decomposição cada elemento $u \in E$, pode ser escrito como $u = u^+ + u^0 + u^- \in E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$. Desta forma a norma de $u$ no espaço $E$ será*

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

*Então o funcional associado a (2.1) é*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\| - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u), \tag{2.2}$$

*com,*

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \;\; e \;\; F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds$$

*Para uso nessa aplicação vamos precisar de alguns resultados entre eles, o seguinte lema:*

**Lema 2.1** *Se $f$ satisfaz $(f_2)$ e $(f_3)$ e $\Omega$ um conjunto qualquer, então $F(x,u) > 0$ e $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u)$ para todo $u \neq 0$.*

***Demonstração:*** *Para ver que $F \geq 0$ notemos que $(f_3)$ garante que $f(x,u)/|u|$ é sempre crescente para $u \neq 0$. Por $(f_2)$ temos*

$$g(x,u) = \lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{|u|} = 0 \;\; \forall x \in \Omega,$$

*o que implica que podemos definir $g(x,0) = 0$. Assim $(f_3)$ implica que $f(x,u)$ deve ser negativa para $u < 0$ e positiva para $u > 0$. Portanto o integrando da* *definição de $F$ é positivo quando $u > 0$, e negativo se $u < 0$, mostrando que $F \geq 0$. Por outro lado, temos*

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds = \int_0^u \frac{f(x,s)}{s} sds$$

*e pela hipótese $(f_3)$, onde garante que $f(x,u)/|u|$ é crescente em $[0,u]$, temos*

$$\max_{s\in[0,u]} \frac{f(x,s)}{s} = \frac{f(x,u)}{u},$$

*daí*

$$\int_0^u \frac{f(x,s)}{s} sds < \int_0^u \frac{f(x,u)}{u} sds = \frac{f(x,u)}{u} \int_0^u sds = \frac{1}{2} f(x,u)u.$$

*Mostrando o resultado.*

**Lema 2.2** *Supondo que $\lambda \geq \lambda_1$, $\Omega$ um domínio qualquer e $f$ satisfazendo $(f_1) - (f_4)$ e seja $u, s, v$ números reais, tais que $s \geq -1$ e seja, $w := su + v \neq 0$. Então*

$$f(x,u)\left[s(\frac{1}{2}+1)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,u+w) < 0$$

*para todo $x \in \Omega$.*

***Demonstração:*** *Fixemos $x \in \Omega$ e $u, v \in \mathbb{R}$. Para $s \geq -1$, consideramos $z = z(s) := (1+s)u + v$. Sendo assim $z = u + w$. Além disso definiremos*

$$g(s) = f(x,u)\left[s(\frac{1}{2}+1)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,z).$$

*Devemos mostrar que $g(s) < 0$ sempre que $u \neq z$. Para isso devemos considerar alguns casos*

*i) Supondo $u = 0$. Então $z \neq 0$ e portanto Pelo Lema 2.1, temos*

$$g(s) = -F(x,z) < 0.$$

*ii) Assumindo $u \neq 0$. Se $uz \leq 0$, segue, de $v = z - (1-s)u$, e substituindo em $v$ na definição de $g$ acima que*

$$g(s) = f(x,u)\left[(\frac{s^2}{2}+s)u + (s+1)(z-(s+1)u)\right] + F(x,u) - F(x,z),$$

*pelo Lema* 2.1, *uma vez que* $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u)$, *segue*

$$g(s) < f(x,u)\left[(\frac{s^2}{2}+s)u + (s+1)(z-(s+1)u)\right] + \frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,z)$$

*e por consequência do Lema* 2.1 *que* $f(x,u)z \leq 0$ *quando* $uz \leq 0$, *pois* $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u) > 0$ *temos*

$$g(s) = \frac{1}{2}(s^2+s+1)f(x,u)u + (s+1)f(x,u)z - F(x,z) \leq 0.$$

*Portanto* $g(s) < 0$ *também para este caso.*

*iii) Por fim, suponha agora,* $uz > 0$. *Observe que*

$$g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u + F(x,u) - F(x,v),$$

*e por consequência do Lema* 2.1, *vem*

$$-\frac{1}{2}f(x,u)u + F(x,u) < 0,$$

*e com isso,*

$$g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u + F(x,u) - F(x,v) < -F(x,v) \leq 0 \text{ e } \lim_{s\to\infty} g(s) = -\infty.$$

*Além disso, calculando a derivada da função real* $g$, *temos*

$$g'(s) = \lim_{h\to 0}\frac{g(s+h)-g(s)}{h} = uz\left(\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,z)}{z}\right). \tag{2.3}$$

*Suponha que* $g$ *atinja o máximo em* $[-1,\infty)$ *em algum* $s$ *com* $g(s) \geq 0$. *Então* $g'(s) = 0$ *e* $u = z$ *por* (2.3), *e por* $(f_3)$

$$g(s) = -\frac{1}{2}s^2 f(x,u)u \leq 0.$$

*Segue que* $g(s)$ *pode ser* 0 *se* $u = z$ *ou seja,* $w = 0$, *mas deve ser negativo caso contrário. Concluindo a demonstração.* ■

*A proposição que apresentaremos a seguir garantirá que o funcional em* (3) *satisfaz a condição* (A2). *A prova desse fato utilizará o Lema* 2.2.

**Proposição 2.1** *Supondo que $f$ satisfaz $(f_1)-(f_4)$. Então*

*(i)* $\widehat{E}(w)\cap\mathcal{M}\neq\emptyset$ *para cada* $w\in E\setminus(E^0\oplus E^-)\equiv E\setminus F$.

*(ii) Se* $u\in\mathcal{M}$, *então*

$$\Phi(u+w)<\Phi(u) \quad \textit{sempre que } u+w\in\widehat{E}(u), w\neq 0.$$

*Consequentemente $u$ é o único máximo global de* $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$

***Demonstração:*** *(i) Seja, $w\in E\setminus F$. Desde que pelo Lema 1.1 item iii), que $\widehat{E}(w)=\widehat{E}(w^+/\|w^+\|)$, sendo assim podemos supor sem perda de generalidade que $w\in S^+$. Afirmamos que $\Phi\leq 0$ em $\widehat{E}(w)\setminus B_R(0)$, desde que $R$ seja suficientemente grande. Se não fosse assim, encontraríamos uma sequência $(u_n)$ tal que*

$$\|u_n\|\to\infty \quad e \quad \Phi(u_n)\geq 0.$$

*Considerando $v_n:=u_n/\|u_n\|$ e como a esfera é fracamente compacta, temos $v_n\rightharpoonup v$ em $E\setminus F$ e usando o mesmo argumento por contradição como em (1.11), agora para o funcional em (3), segue $v=0$. Uma vez que $v_n^+\in E^+$, podemos escrever $v_n^+=s_nw$ com $w\in S^+$, assim*

$$\|v_n^+\|=\|s_nw\|=s_n,$$

*limitada, e longe de 0. No entanto,*

$$v_n^+\to sw,\ s>0.$$

*Contradição. Por (i) do Lema 2.1 e por*

$$\Phi(sw)=\frac{1}{2}s^2+o(s^2) \quad \textit{quando} \quad s\to 0,$$

*segue que,*

$$0<\sup_{w\in\widehat{E}(w)}\Phi<\infty.$$

*Uma vez que $\Phi$ é fracamente semicontínuo superiormente em $\widehat{E}(w)$ e $\Phi \leq 0$ em $\widehat{E}(w) \cap F$, o supremo é atingido em algum ponto $u_0$ tal que $u_0^+ \neq 0$. Então $u_0$ é um ponto crítico de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$, consequentemente $u_0 \in \mathcal{M}$.*

*(ii) Seja a forma bilinear,*

$$B(v_1, v_2) := \int_\Omega (\nabla v_1 \nabla v_2 - \lambda v_1 v_2) dx \quad v_1, v_2 \in E.$$

*Para $u \in \mathcal{M}$, seja $u + w \in \widehat{E}(u)$. Então $u + w = (1+s)u + v$ onde $s \geq -1$ e $v = v^0 + v^- \in F$. Notemos pela definição do funcional (2.3) que*

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = \frac{1}{2}[B(u+w, u+w) - B(u,u)] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

$$= \frac{1}{2}[B((1+s)u + v, (1+s)u + v) - B(u,u)] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

*e por propriedade da bilinear, segue*

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = \frac{1}{2}\left([(1+s)^2 - 1]B(u,u) + 2(1+s)B(u,v) + B(v,v)\right)$$

$$+ \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

$$= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + B(u, s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v) + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

$$= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + \int_\Omega (f(x,u)) \, [s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

*onde usamos o fato de que $z := s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v \in E(u)$ e ainda,*

$$0 = \Phi'(u)z = B(u,z) - \int_\Omega f(x,u) z dx.$$

*Uma vez que $w$ é diferente de zero em um conjunto de medida positiva a ultima integral é negativa de acordo com o Lema 2.2. Assim,*

$$\Phi(u+w) < \Phi(u).$$

$\blacksquare$

*Estamos prontos para apresentar o principal resultado deste capítulo, o qual vamos aplicar o método da variedade de Nehari generalizada, para isso precisamos mostrar que o funcional associado ao problema em* (2.1)*, verifica as condições* $(A1)-(A3)$ *dadas no capitulo* 1*, da variedade de Nehari generalizada, e mostrar também as hipóteses do Teorema* 1.1*, apresentado no capítulo* 1*, em que é o resultado fundamental do método.*

**Teorema 2.1** *Supondo que* $\lambda \geq \lambda_1$*, e* $f$ *satisfazendo* $(f_1)-(f_4)$*. Então o problema em* (2.1) *possui uma solução ground state. Além disso, se* $f$ *for impar, então o problema dado em* (2.1) *tem uma infinidade de pares de soluções.*

***Demonstração:*** *Vamos primeiramente mostrar que a hipótese* $(A1)$ *é satisfeita, uma vez que o funcional* $\Phi$ *pode ser escrito como em* (3)*, resta mostrar que* $I$ *é fracamente contínuo para a conclusão da verificação de* $(A1)$*. Para isso, suponhamos que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, os teoremas de imersão de Sobolev garantem que* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *continuamente, assim* $u_n \to u$ *em* $L^q(\Omega)$*. Dessa forma, fazendo uso de* $(f_1)$ *e quando* $n \to \infty$*, temos*

$$|F(x,u)-F(x,u_n)| \leq \left|\int_{u_n}^{u} f(x,s)ds\right| \leq \left|\int_{u_n}^{u} a(1+|s|^{q-1})ds\right|$$

*isto é,*

$$|F(x,u)-F(x,u_n)| \leq a\left(|u|-|u_n|+\frac{|u|^q}{q}-\frac{|u_n|^q}{q}\right) \to 0.$$

*O que implica*

$$I(u)-I(u_n)=\int_\Omega (F(x,u)-F(x,u_n))dx \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

*Fazendo uso do Lema* 2.1*, garantimos que a condição* $(A1)$ *é valida. Vamos mostrar que o item (i) do Teorema* (1.1) *é valido. Decorre diretamente das desigualdades de Hölder e Poincaré, basta notar que,*

$$|I'(u)v| = \left|\int_\Omega f(x,u)vdx\right| \int_\Omega |f(x,u)||v|dx \leq c_p\|u\|\|v\|,$$

*isto é*

$$\|I'(u)\| \leq c\|u\|.$$

*Mostrando o item (i) do Teorema* (1.1)*. Para verificarmos o item (ii) do do Teorema* (1.1)*, basta notarmos que*

$$\frac{I(s_n u_n)}{s_n^2} = \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2} dx \to \infty,$$

*para um subconjunto fracamente compacto* $\mathcal{W} \ni (u_n)$*. Para isso, podemos supor a menos de subsequencia,* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $E \setminus \{0\}$ *e* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p, definindo* $h_j$ *para os pontos em que* $u(x) \neq 0$ *como*

$$h_j(x) := \frac{F(x, s_n u_j)u_j^2}{(s_n u_j)^2} = \frac{F(x, s_n u_j)}{s_n^2},$$

*em que é contínua, logo mensurável e positiva, devido* $F \geq 0$ *pelo Lema* 2.1*. Do lema de Fatou, temos*

$$\int_\Omega \liminf h_j dx \leq \int_\Omega h_j dx \ \ \forall \ j$$

*e em particular,*

$$\int_\Omega \frac{F(x, s_n u)u^2}{(s_n u)^2} dx \leq \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2},$$

*e por* $(f_4)$*, a integral da parte esquerda acima tende para o* $\infty$ *quando* $n \to \infty$*. Mostrando que é satisfeito o item (ii) do Teorema* (1.1)*. Vamos então verificar que também é satisfeito o item (iii) do Teorema* (1.1)*. Novamente pelas desigualdades de Hölder e Paincaré, vem*

$$\begin{aligned} |[I'(u_n) - I(u)]v| &= \left| \int_\Omega (f(x, u_n)v - f(x, u)v) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x, u_n) - f(x, u)||v| \\ &\leq c_p \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|v\| \end{aligned}$$

*como* $\|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0$*, o item (iii) está verificado.*

*Por fim, a condição (A2) é valida pela Proposição* (2.1)*, e (A3) na demonstração do Teorema* 1.1*. Em suma, fazendo uso do Teorema* 1.1*, juntamente com o Teorema A.*2*, e o resultado está provado.* ■

# Capítulo 3

# Um problema do tipo Schrödinger

*Vamos começar considerando o problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

*Conhecido como problema de Schrödinger. Supondo* $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo*

($f_1$) *Com* $a > 0$ *e* $2 < q < 2^*$, *com* $2^* := 2N/(N-2)$ *se* $N \geq 3$ *e* $2^* := \infty$ *caso contrário, tais que*

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right),$$

($f_2$) $V$, $f$ *são 1-periódicas em* $x_1, ..., x_N$, $0 \in \sigma(-\Delta + V)$ *e* $\sigma(-\Delta+V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$,

($f_3$) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* $x$ *quando* $u \to 0$,

($f_4$) $u \to f(x,u)/|u|$ *é estritamente crescente,*

($f_5$) $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* $x$ *quando* $|x| \to \infty$, *Com o funcional associado dado por*

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{3.2}$$

*Estamos com um problema no* $\mathbb{R}^N$*, em vez do* $\Omega$ *limitado como foi visto no problema em* (2.1)*. Para o funcional em* (3.2)*, a proposição* (2.1) *ainda é valida basta fazer as alterações seguintes. A diferença aqui é que a integração é no* $\mathbb{R}^N$ *em vez de* $\Omega$*, e na forma bilinear* $B(v_1, v_2)$ *substituir* $-\lambda v_1 v_2$ *por* $V(x)v_1v_2$*. Notemos ainda que apesar de que uma das hipóteses do Teorema* 2.1 *ser* $dim E^- < \infty$*, este fato não foi usado na demonstração da Proposição* 2.1*, assim podemos fazer uso da mesma. Feito isso, resta colocar o funcional em* (3.2) *como em* (*A*1)*, que será feito através do Lema* (3.1) *para assim resolvermos o Teorema* 3.1 *via minimização juntamente com Lema A.*1 *de P.L Lions'. Em* [12] *foi mostrado que se* $f$ *é impar em* $u$ *e temos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, então o problema não linear de Schrödinger tem uma infinidade de soluções geometricamente distintas, no entanto aqui vamos apenas provar a existência de uma solução de estado fundamental via minimização em* $\mathcal{M}$*.*

**Lema 3.1** *Supondo* $(f_1) - (f_5)$ *e definindo a norma em* $E$ *como*

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

*Então*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

***Demonstração:*** *Considerando* $u^+ = \frac{u+v}{2}$ *e* $u^- = \frac{u-v}{2}$ *tal que* $v \in E$*. Notemos* $u = u^+ + u^- \in E$*. Vamos calcular a norma de* $u^+$ *e* $u^-$*. Segue*

$$\begin{aligned}\|u^+\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|\nabla u|^2}{4} + \frac{\nabla u \nabla v}{2} + \frac{|\nabla v|^2}{4}\right)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(\frac{u^2}{4} + \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4}\right)\end{aligned}$$

*de forma análoga*

$$\|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{|\nabla u|^2}{4} - \frac{\nabla u \nabla v}{2} + \frac{|\nabla v|^2}{4} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left( \frac{u^2}{4} - \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4} \right).$$

*Por fim, calculando* $\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2$*, segue,*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) uv dx.$$

*em particular se* $u = v$*, temos*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx$$

■

*Apresentaremos aqui o resultado principal deste capitulo, que é o Teorema* 3.1*. Em que vamos garantir a existência de solução ground state para o problema em* (3.1)*. Para isso vamos mostrar inicialmente que são satisfeitas* $(A1) - (A3)$*, para por fim combinar os argumentos da Proposição* 1.3

**Teorema 3.1** *Supondo* $(f_1) - (f_5)$*. Então o problema* (3.1) *possui uma solução ground state.*

***Demonstração:*** *Seja* $E = H^1(\mathbb{R}^N)$*, desde que* $(f_2)$ *acontece e* $E^0 = \{0\}$*,* $dim E^{\mp} = \infty$ *e pelo Lema* 3.1 *podemos escrever*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

*Portanto* $\Phi$ *pode ser escrito como em* $(A1)$*, e notando que* $F \geq 0$*,* $I$ *é fracamente semi-continuo inferiormente onde vemos isso diretamente pelo Lema de Fatou (apêndice), e fazendo uso da imersão contínua* $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *garante a menos de subsequência* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $E$ *então* $u_n \to u$ *em* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, agora sim, pelo Lema de Fatou*

$$\liminf_{u_n \to u} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{u_n \to u} F(x, u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

*Portanto $I$ é fracamente semicontínuo inferiormente. O Lema 2.1 implica que (A1) é válido e (A2) pela Proposição 2.1. E ainda (A3) e $c = inf_{\mathcal{M}} > 0$ pela demonstração do Teorema 1.1.*

*Notemos agora que por $(f_3)$ para cada, $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon$ tal que*

$$|u| < C_\epsilon \Rightarrow |f(x,u)| \leq \epsilon |u|$$

*e por $(f_1)$*

$$|f(x,u)| \leq \epsilon|u| + C_\epsilon |u|^{q-1}. \tag{3.3}$$

*Resta então combinar os argumentos da Proposição 1.3. Considerando uma sequência (PS) $(w_n)$ para $\Psi$. Então $(u_n)$ com $u_n := m(w_n)$ é (PS) para $\Phi$ pelo Corolário 1.1. Assumindo*

$$\|u_n\| \to \infty \quad com \quad v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v$$

*Vemos como em (1.11), seguindo em $v_n \rightharpoonup 0$ em $E \setminus F$ depois de passar para uma subsequência, e ainda*

$$\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\| \quad e \quad \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 = 1,$$

*combinando,*

$$\frac{\|v_n^+\|^2}{2} \geq \frac{\|v_n^-\|^2}{2} \quad e \quad \frac{\|v_n^-\|^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\|v_n^+\|^2}{2}.$$

*então $\|v_n^+\| \geq 1/\sqrt{2}$.*

*Se $v = 0$ e $v_n^+ \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ e usando (3.3), então para cada $s > 0$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to 0$$

*e portanto*

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(s_{v_n^+} v_n^+) \geq \Phi(sv_n^+) \geq \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to \frac{s^2}{2} \tag{3.4}$$

*que é uma contradição para $s > \sqrt{2d}$. Dessa forma $v_n^+ \nrightarrow 0$. Por P.L. Lions Lema A.1 só nos resta que*

$$\int_{B_1(y_n)} (v_n^+)^2 dx \geq \delta \tag{3.5}$$

*para algum $\delta > 0$, $y_n \in \mathbb{R}^N$ e quase todo $n$. Desde que $\Phi$ e $\mathcal{M}$ são invariantes por translação da forma $v = v(\cdot - y)$, $y \in \mathbb{Z}^N$, podemos assumir a translação $v_n = v_n(\cdot - y_n)$ para algum $y_n \in \mathbb{Z}^N$, que $y_n$ é limitada. Desde que $v_n^+ \to v^+$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, (pois se $u_n \rightharpoonup u$ em $E$ implica $u_n \to u$ $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre, a menos de subsequência), assim, (3.5) implica que $v^+ \neq 0$ e consequentemente $v \neq 0$, uma contradição uma vez que o Lema de Fatou garante*

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|}^2 = \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2} v_n^+ dx \to -\infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

*Mostrando que $(u_n)$ é limitada. Com isso podemos assumir $u_n \rightharpoonup u$ q.s. Consequentemente $u$ é uma solução de (3.1) possivelmente trivial $(u = 0)$. Se $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, então por (3.3) e Holder e desigualdades de Sobolev vem*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx = o\left(\|u_n\|\right).$$

*Então*

$$o(\|u_n^+\|) = \Phi'(u_n)u_n^+ = \|u_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx = \|u_n^+\|^2 + o(\|u_n^+\|).$$

*Consequentemente $u_n^+ \to 0$ em $E$ e*

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 - I(u_n)\right) \leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \|u_n^+\|^2 = 0,$$

*contradizendo o fato de que $\inf_{\mathcal{M}} \Phi > 0$. Então $u_n \nrightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ aplicando novamente o Lema P.L Lions como em (3.5) neste momento sobre $u_n$ e como antes, podemos assumir a translação $u_n$, se necessário, $u_n \rightharpoonup u \neq 0$. Consequentemente $u$ é uma solução não trivial de (3.1), e em particular, $u \in \mathcal{M}$.*

*Ainda resta mostrar que $\Phi(u) = c := \inf_{\mathcal{M}} \Phi$. Uma vez que a menos de subsequência que $u_n \to u$ q.s., resta agora combinar o Lema de Fatou com a definição do funcional, no que segue*

$$c + o(1) = \Phi(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right) dx \quad \forall n$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,u)\right) dx + o(1)$$

$$= \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u + o(1) = \Phi(u) + o(1).$$

*Portanto,* $\Phi(u) \leq c$. *Concluindo a demonstração.*

$\blacksquare$

# Capítulo 4

# Um Sistema não Linear

*Neste capitulo faremos agora uma aplicação para um sistema não linear, onde a resolução se dará de forma análoga com a aplicação feita no capitulo 2, com algumas alterações que serão apresentadas.*

*Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

*Supondo que* $g$, $h$ *satisfazem* $(f_1)-(f_4)$ *do problema dado em* (2.1), *definamos*

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad e \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

*e seja* $E := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad para\ u = (u_1, u_2) \in E.$$

*Então* $\Phi$ *é* $C^1(E, \mathbb{R})$ *e pontos críticos de* $\Phi$ *são soluções de* (4.1).

*Novamente como de costume já feito nas aplicações anteriores, já adianto que a prova do Teorema abaixo, vai se resumir em escrever o funcional* $\Phi$ *da forma* *em* $(A1)$*, onde* $I$ *vamos escrever da seguinte forma:*

$$I(u) := \int_\Omega ((G(x,u_1)) + H(x,u_2))dx. \tag{4.2}$$

*O resto é análogo aos passos do problema dado em* $(2.1)$*, com uma pequena alteração na demonstração da Proposição* $2.1$*.*

*Vamos então começar fazendo a caracterização do funcional* $\Phi$ *com o seguinte Lema abaixo*

**Lema 4.1** *Supondo* $(f_1)-(f_4)$ *do problema dado em* $(2.1)$ *com a norma* $\|\cdot\|$ *em* $E$ *definida por*

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) \quad \textit{para } u = (u_1,u_2) \in E.$$

*Então*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2),$$

***Demonstração:*** *De forma análoga ao Lema* $3.1$*, notando que podemos escrever cada* $u \in E$ *como*

$$u = u^+ + u^- = \frac{1}{2}(u_1+u_2, u_1+u_2) + \frac{1}{2}(u_1-u_2, u_2-u_1) \quad \textit{onde } u^{\mp} \in E^{\mp}.$$

*Calculando as normas* $\|u^+\|^2$ *e* $\|u^-\|^2$ *temos,*

$$\|u^+\|^2 = \int_\Omega \left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^2 + \int_\Omega \left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^2$$

*daí,*

$$\|u^+\|^2 = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} + \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right) + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} + \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right),$$

*e de maneira análoga*

$$\|u^-\|^2 = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} - \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right) + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_2|^2}{4} - \frac{|\nabla u_2 \nabla u_1|}{2} + \frac{|\nabla u_1|^2}{4}\right).$$

*Por fim*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1 \nabla u_2| + |\nabla u_2 \nabla u_1|)$$

*e por* (4.3) *abaixo, segue*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)$$

■

*Finalmente, vamos apresentar o ultimo Teorema deste trabalho, que é o Teorema* 4.1*, onde vamos garantir a existência de uma solução ground state e uma infinidade de pares de soluções para o sistema dado em* (4.1)*. A prova desde resultado se dará de forma igual, a prova do Teorema* 2.1*. No entanto, precisamos ajustar algumas passagens na demonstração da Proposição* 2.1*, para assim termos a condição* $(A2)$ *satisfeita, para podermos fazer uso do Teorema* 1.1*. E assim concluir, nossa ultima aplicação do método.*

**Teorema 4.1** *Supondo* $g$, $h$ *satisfazendo* $(f_1) - (f_4)$ *do problema dado em* (2.1)*. Então o sistema* (4.1) *possui uma solução ground state. Além disso, se* $g$ *é impar em* $u_1$ *e* $h$ *é impar em* $u_2$*, então o problema em* (4.1) *possui infinitos pares de soluções.*

***Demonstração:*** *A forma quadrática*

$$u \mapsto \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$$

*é definida e* $E = E^+ \oplus E^-$*, onde*

$$E^{\mp} = \{u \in E : u_2 = \mp u_1\}. \tag{4.3}$$

*Então* $dim E^{\mp} = \infty$*. Vamos então escrever o funcional como em* $(A1)$*, isto é, pelo Lema* 4.1*, assim temos*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u).$$

*Notemos que* $I$ *em* (4.2) *é fracamente semicontínuo inferiormente. Aqui o restante da prova é exatamente igual a do Teorema* 2.1*. Assim a demonstração* *já estaria encerrada se não fosse os seguintes ajustes na Proposição* 2.1 *item (ii) para este funcional. Tais ajustes seguem: Uma vez que o Lema* 2.2 *é valido para $g$ e $h$, seguimos então na Proposição* 2.1*. Se $u \in \mathcal{M}$, então*

$$\Phi(u+w) < \Phi(u) \quad \textit{sempre que } u+w \in \widehat{E}(u), w \neq 0.$$

*ou melhor, podemos escrever*

$$u+w = (1+s)u+v \quad \textit{com } s \geq -1 \textit{ e } v \in E^{-}.$$

*Assim, de forma análoga da prova da Proposição* 2.1 *item (ii), temos*

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = -\frac{\|v\|^2}{2}$$

$$+\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla [s(\frac{s}{2}+1)u_2 + (1+s)v_2]dx$$

$$+\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla [s(\frac{s}{2}+1)u_1 + (1+s)v_1]dx$$

$$+\int_\Omega \left(G(x,u_1) - G(x,u_1+w_1) + H(x,u_2) - H(x,u_2+w_2)\right) dx,$$

*assim*

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = -\frac{\|v\|^2}{2} + \int_\Omega (g(x,u_1)z_1 + G(x,u_1) - G(x,u_1+w_1))dx$$
$$+\int_\Omega (h(x,u_2)z_2 + H(x,u_2) - H(x,u_2+w_2))dx$$

*pois como*

$$z_1 = s(\frac{s}{2}+1)u_1 + (1+s)v_1, z_2 = s(\frac{s}{2}+1)u_2 + (1+s)v_2 \in E(u),$$

*segue*

$$0 = \Phi'(u)z_{(1,2)} = B(u, z_{(1,2)}) - \int_\Omega [g(x,u_1)z_1 + h(x,u_2)z_2].$$

*Desde que $w = (w_1, w_2) \neq 0$, no mínimo uma das integrais acima é negativa, portanto $\Phi(u+w) < \Phi(u)$.*

*Portanto, pelo Teorema* 1.1*, o resultado está provado.*

■

*Assim concluímos nossa ultima aplicação do método da variedade de Nehari generalizada.*

# Apêndice A

# Resultados Importantes

**Definição A.1** *(Função Normalização). Uma função* $\eta \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *é dita função normalização se,* $\eta$ *é estritamente crescente,* $\eta(0) = 0$ *e*

$$\eta(s) \to +\infty \quad quando \quad s \to +\infty.$$

**Teorema A.1** *Ver em* [11]. *Se* $E$ *tem dimensão infinita, e* $\Phi \in C^1(S, \mathbb{R})$ *é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale-(PS), então* $\Phi$ *tem infinitos pares de pontos críticos.*

**Lema A.1** *Se* $(u_n)$ *é uma sequencia (PS) para um funcional* $\Phi$ *e limitada, então somente uma das alternativas ocorrem:*

**(i)** $u_n \to 0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$

**(ii)** *existem* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e* $R, \beta > 0$ *tais que*

$$\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0.$$

**Lema A.2** *(Lema de Fatou) Se* $(f_n) \in M^+(X, X)$*, então*

$$\int (\liminf f_n d\mu) \leq \liminf \int f_n d\mu$$

**Teorema A.2** *(Teorema 3 de* [10]*). Supondo que $f$ é contínua e satisfaz a condição* (2.2)*. Então*

**(i)** $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega))$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se e somente se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma solução do problema* (2.1)*.*

**Teorema A.3** *(Teorema 6 de* [10]*). Supondo que $V$, $f$ são contínuas $V$ é limitada e $f$ satisfaz* (3)*. Então*

**(i)** $\Phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se, e somente se,* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *é solução de* (3.1)

**Teorema A.4** *(Desigualdade de Hölder): Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $p \geq 1$*. Então,*

$$f.g \in L^1(\Omega)$$

*e*

$$\int_\Omega |f.g|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Teorema A.5** *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left( \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

# Bibliografia


[1] *A. Ambrosetti, G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Department of Mathematics, University of Pisa. 1993.*

[2] *P. Drabek and S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the Fibering method, Proc. Royal Soc. Edinb. A 127 (1997), 703-726*

[3] *P. Kuchment, Floquet Theory for Partial Diferential Equations, Birkh¨auser, Basel, 1993.*

[4] *P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 1 (1984), 109-145 and 223-283.*

[5] *Y.Q. Li, Z.Q. Wang and J. Zeng, Ground states of nonlinear Schr¨odinger equations with potentials, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 23 (2006), 829-837.*

[6] *Z. Nehari, On a class of nonlinear second-order diferential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101-123.*

[7] *Z. Nehari, Characteristic values associated with a class of non-linear secondorder diferential equations, Acta Math. 105 (1961), 141-175.*

[8] *A. Pankov, Periodic nonlinear Schrodinger equation with application to photonic crystals, Milan J. Math. 73 (2005), 259-287.*

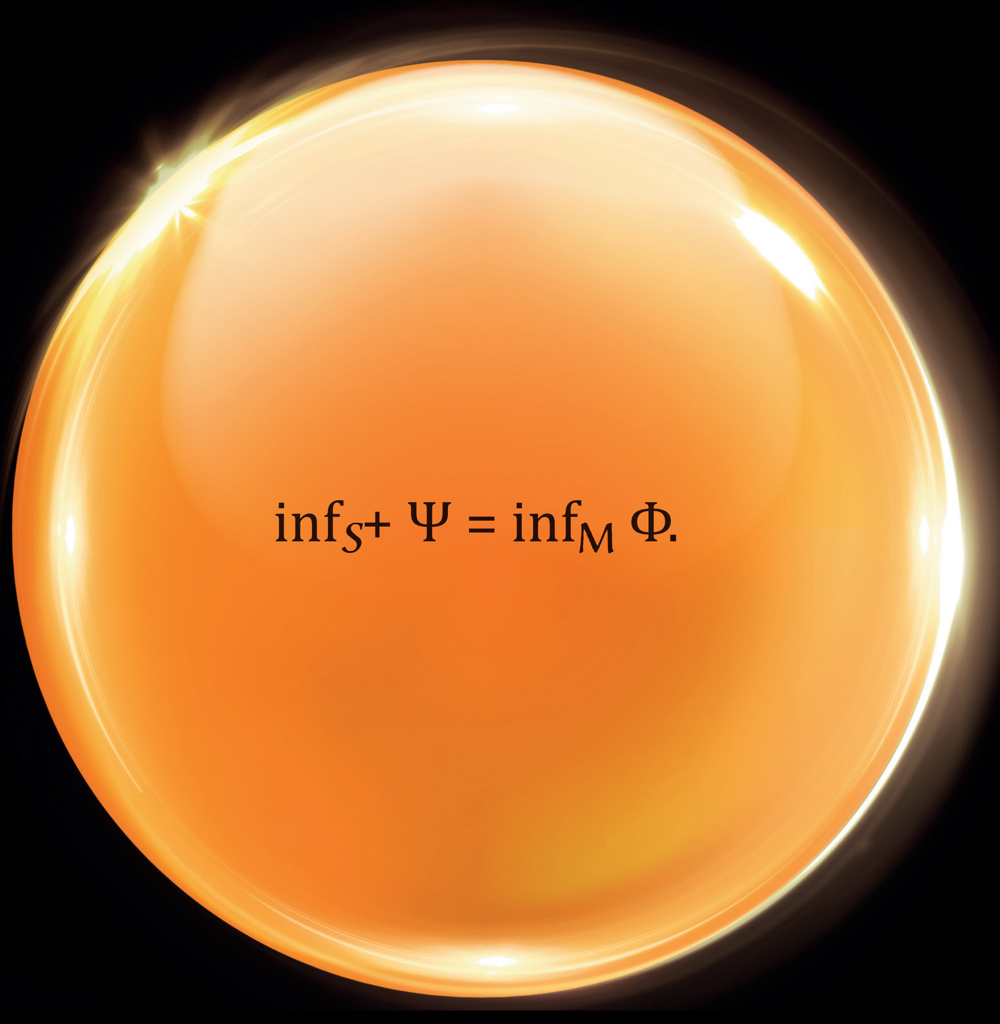
[9] *M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV, Academic Press, New York, 1978.*

[10] *A. Szulkin and T.weth , The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston, (2010)597-632.*

[11] *A. Szulkin, Ljusternik-Schnirelmann theory on* $C^1$ *-manifolds, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 5 (1988), 119-139.*

[12] *A. Szulkin and T. Weth, Ground state solutions for some indefinite variational problems, J. Func. Anal. 257 (2009), 3802-3822.*

# A Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações




RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
WhatsApp: 91 98885-7730
CNPJ: 39.242.488/0001-07
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

9 786558 894834 >