rfb editora

Discutindo o ensino de proporção: perspectivas sobre a elaboração e resolução de problemas

Maria Cilane Gonçalves da Silva

Ernani Martins dos Santos

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
91985661194
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
Tv. Quintino Bocaiúva, 2301, Sala 713, Batista Campos, Belém - PA, CEP: 66045-315

Editor-Chefe
Prof. Dr. Ednilson Ramalho
Diagramação
Autores
Revisão de texto e capa
Autores

Bibliotecária
Janaina Karina Alves Trigo Ramos-CRB 8/9166
Produtor editorial
Nazareno Da Luz

Catalogação na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

S586d

Silva, Maria Cilane Gonçalves da

Discutindo o ensino de proporção: perspectivas sobre a elaboração e resolução de problemas / Maria Cilane Gonçalves da Silva, Ernani Martins dos Santos. – Belém: RFB, 2024.

Livro em PDF
60p.

ISBN 978-65-5889-762-0
DOI 10.46898/rfb.d9550903-dc06-415d-8691-199fbee33dd0

1. Questões relacionadas à resolução de problemas matemáticos em geral. I. Silva, Maria Cilane Gonçalves da. II. Santos, Ernani Martins dos. III. Título.

CDD 510.76

Índice para catálogo sistemático

I. Questões relacionadas à resolução de problemas matemáticos em geral

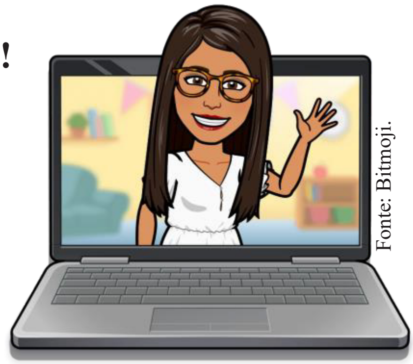
Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

Equipe RFB Editora

APRESENTAÇÃO

Olá, professores e professoras!



Fonte: Bitmoji.

No âmbito da Educação Matemática, a prática de elaboração de problemas pelo professor tem emergido como uma estratégia didática fundamental para aproximar os conteúdos escolares dos contextos reais dos estudantes. Essa abordagem permite que, nós professores, possamos formular novos problemas ou reformular problemas existentes, considerando a realidade dos nossos estudantes e as habilidades que desejamos desenvolver com os problemas propostos.

É importante destacar que essa prática está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular — BNCC (Brasil, 2018), que preconiza a importância de uma abordagem contextualizada e significativa no ensino da Matemática, valorizando a capacidade de os estudantes aplicarem os conceitos matemáticos escolares para resolver problemas do mundo contemporâneo.

Nesse sentido, a seguir, faremos uma breve apresentação desta cartilha, delineando seu objetivo e as contribuições que esperamos trazer com esse material.

Cartilha Didática

Esta cartilha didática, sob o título: Discutindo o ensino de proporção: perspectivas sobre a elaboração e resolução de problemas, constitui o produto educacional originado da Dissertação de Mestrado em Educação, realizado no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Formação de Professores e Práticas Interdisciplinares – PPGFPPI, da Universidade de Pernambuco, *Campus* Petrolina, intitulada de "A ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORÇÃO: um estudo com professores de Matemática do Ensino Fundamental do Município de Cabrobó em Pernambuco", desenvolvida entre os anos de 2022 e 2024, sob a orientação do professor Dr. Ernani Martins dos Santos.

Objetivo

Apresentar perspectivas de elaboração e resolução de problemas de proporção que perpassem a prática pedagógica dos professores e professoras de Matemática, de uma maneira didática, prática e dinâmica, no sentido de incentivá-los a refletirem sobre a importância dos conceitos subjacentes aos problemas, que são propostos aos estudantes, auxiliando-os nessa direção.

Contribuições

Esperamos que esse recurso contribua para o dia a dia do professor, oferecendo-lhe a possibilidade de, ao trabalhar os conteúdos relacionados à proporção, considerar a elaboração e resolução de problemas conceitualmente mais diversificados, de modo a possibilitar a construção de uma aprendizagem mais consistente e significativa da Matemática para os estudantes.

PANORAMA DA CARTILHA

1. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida pelo psicólogo, matemático e pesquisador francês Gérard Vergnaud, considerado uma referência na didática de Matemática. Trata-se de uma abordagem cognitivista, que enfatiza como os estudantes compreendem e desenvolvem os conceitos matemáticos.

Gérard Vergnaud

Fonte: Gérard Vergnaud: "Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática/Nova Escola

Possibilidades da TCC para o ensino

- ✓ Trabalhar com uma seleção específica de problemas matemáticos para explorar os conceitos e entender melhor como se relacionam e como podem ser aplicados em diferentes situações.

- ✓ Compreender de maneira mais abrangente como os estudantes organizam e desenvolvem seus conhecimentos matemáticos.

- ✓ Propor novas situações de ensino que ajudem os estudantes a avançarem de conceitos menos complexos, que já dominam, para aprendizagens de conceito mais complexos.

Mas, afinal o que é um Campo Conceitual?

Um Campo Conceitual, conforme definido por Vergnaud (2017), é um conjunto de situações, conceitos e representações simbólicas, intimamente relacionados entre si.

Fonte: Bitmoji.

Construindo os conceitos

Professor(a), conforme a perspectiva de Vergnaud (1985; 2017), a construção de um conceito pelo estudante requer um processo que:

- ✓ vá além da apresentação de uma definição pronta;
- ✓ explore um conceito associado a outros conceitos;
- ✓ considere a utilização da resolução de problemas teóricos e práticos, pois é através dessa prática que os conceitos passam a ter significados para os estudantes;
- ✓ compreenda a aprendizagem de um conceito como um processo lento que ocorre progressivamente ao longo dos anos escolares, à medida que os estudantes são influenciados nessa perspectiva;
- ✓ considere esses três aspectos (SIR), de forma interconectada: situações (S), invariantes operatórios (I) e representações simbólicas (R).

Definindo situações, invariantes operatórios e representações simbólicas (SIR).

(S)

Conjunto de situações e problemas que, em um conteúdo específico, abarcam os diferentes conceitos que dão sentido a essas situações.

(I)

Conjunto de Invariantes Operatórios são os procedimentos e estratégias consistentes que guiam a execução da atividade. Esses invariantes são os passos essenciais que ajudam os estudantes a analisarem e resolverem as situações propostas.

(R)

Conjunto de representações simbólicas, que inclui diferentes formas de linguagens (verbais, escritas, gestuais), bem como diagramas, tabelas, etc., que os estudantes utilizam para descrever e fazer interpretações das situações, assim como facilitar os processos de resolução.

Fonte: Vergnaud (1985; 2017), adaptado.

O que são situações?

Na TCC, situações são compreendidas por Vergnaud (2009) como sinônimos de tarefas escolares a serem solucionadas, as quais podem ser vistas na perspectiva de problemas, exercícios, entre outras atividades.

Mas, afinal o que é um problema matemático?

Professor(a), no contexto desta cartilha, consideramos como problema ou situações-problema de Matemática, atividades que exploram os conceitos, apresentam as informações e dados numéricos por meio de enunciados contextualizados em temáticas significativas para os estudantes. De maneira mais específica, são "situações que tornam os conceitos significativos para o indivíduo, mobilizando um conjunto de operações e representações para sua resolução" (Spinillo *et al*, 2017, p. 930).

Exemplo de um problema matemático

A distância entre a casa de Matheus e a sua escola é de 3 quilômetros. A casa de Miguel é 4 vezes mais distante da escola que a casa de Matheus. Qual a distância entre a casa de Miguel e a escola? (Santos, 2022, p. 221).

Observa-se que, no problema apresentado, o enunciado foi elaborado fazendo uso de um contexto, que envolve aspectos do cotidiano dos estudantes, como distância entre as casas de Matheus e Miguel e a escola. Esses aspectos podem despertar, no estudante, o interesse de compreender e resolver o problema, por identificar algum sentido em resolvê-lo.

Para resolver esse problema, espera-se que o estudante multiplique o valor da distância da casa de Matheus pela relação (4 vezes) e encontre a distância da casa de Miguel que é 12 quilômetros (Santos, 2022).

Professor(a), o raciocínio descrito acima representa um dos **invariantes operatórios** que podem ser utilizados na resolução desse problema. A forma como esse raciocínio é representado, seja verbalmente, por meio do cálculo escrito ou por meio de esquemas ilustrativos, **são as representações.**

Esclarecido o que é um problema, vamos compreender o que é um exercício?

Professor(a), exercícios são situações que, geralmente, apresentam um contexto matemático, ou seja, são desprovidas de uma contextualização social para explorar a compreensão e identificação das informações e dados numéricos. Essas atividades priorizam o cálculo memorizado e mecânico, onde os estudantes seguem passo a passo uma sequência predefinida de operações. Atividades dessa natureza, nem sempre possibilitam a construção dos conceitos pelos estudantes, tendo como finalidade especifica, o treinamento de cálculos algorítmicos e procedimentos matemáticos mecanizados (Dante, 2010).

A seguir, apresentaremos um exemplo de uma situação caracterizada como um exercício.

Nas proporção $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$ o valor de x é:

a) 5,0
b) 6,5
c) 7,5
d) 8,5

Resolução apresentada pela professora

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$$

$$2x = 15$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$$x = 7,5$$

Exercício extraído do protocolo de pesquisa do Participante P2 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto transcrito conforme escrito no protocolo).

Professor (a), observa-se que a resolução de exercícios leva a aplicação de invariantes operatórios previamente memorizados, como o método da “regra de três simples” utilizado pela professora para solucionar o exercício elaborado. Invariantes dessa natureza exploram somente os cálculos algorítmicos, sem possibilitar a compreensão das relações conceituais existentes na atividade.

Ressaltamos que, embora os exercícios tenham sua relevância no ensino de Matemática, são atividades que podem resultar em aprendizagens mal formuladas e limitadas, ocasionando diversas dificuldades para que os estudantes desenvolvam as habilidades essenciais e dominem os conceitos (Santos; Lautert, 2021). Por isso, no contexto desta cartilha, daremos enfoque apenas à elaboração e resolução de situações caracterizadas como problema.

Fonte: Bitmoji.

Aprendizagem dos Conceitos

Entendido o que é um Campo Conceitual e seus elementos, daremos enfoque a maneira como ocorre as aprendizagens conceituais pelos estudantes.

De acordo com Vergnaud (1993), no processo de ensino de um conceito, é essencial compreender que:

- ✓ Os estudantes não assimilam um conceito resolvendo uma única situação, nem estudando esse conceito de forma isolada;
- ✓ A aprendizagem ocorre por meio da resolução de uma variedade de problemas que abordam diferentes conceitos, estimulam diferentes tipos de raciocínios e mobilizam várias forma de representação.

Fonte: Freepik.


Fonte: Bitmoji.

Importante!

Professor(a), de acordo com Vergnaud (2017), a aprendizagem se concretiza quando os estudantes conseguem construir uma compreensão clara e abrangente dos conceitos estudados.

2. CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

Professor(a), em relação à estrutura e organização dos conceitos matemáticos, Vergnaud (1983), dentre outros campos, destaca o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo.

Campo Conceitual Aditivo	Campo Conceitual Multiplicativo
Refere-se ao conjunto de situações que envolvem as operações de adição ou subtração, juntamente com os conceitos e representações que auxiliam na resolução dessas situações.	Corresponde ao conjunto de situações que exigem, no processo de resolução, a aplicação das operações de multiplicação, divisão ou ambas. Assim como do conjunto de conceitos (razão, **proporção,** taxa, função linear, entres outros) e representações que possibilitam compreender e resolver tais situações.

Como exemplo de uma situação do Campo Conceitual aditivo, apresentamos o seguinte problema:

Problema Aditivo - Em uma loja de doces, Maria comprou na promoção: três barras de chocolate por R$ 16,50 e dois pacotes de balas por R$ 14,60. Quantos reais ela gastou no total?

Professor(a), perceba que a operação utilizada para resolver essa situação é adição, somando: 16,50 +14,60 = 31,10.

Agora, veja um exemplo de um problema multiplicativo.

Problema Multiplicativo: João foi à padaria a pedido de sua mãe para comprar três litros de leite. Ao chegar à padaria, observou, na tabela de preços, que um litro de leite estava custando R$ 6,00. Qual o valor pago por João pelos três litros de leite comprados”?

Agora, perceba que, nessa situação, a resolução requer o uso da operação de multiplicação. Embora muitas vezes o estudante resolva situações dessa natureza por meio da adição, somando: 6,00 + 6,00 + 6,00 = 18,00, ao invés de relacionar que se um litro de leite custa R$ 6,00, três litros de leite corresponderão ao triplo do valor de um litro, isto é, 3 x 6,00 = 18,00.

Nesse sentido, é importante destacar que, embora sejam conceitos de campos diferentes, existem pontos em que eles se interligam, chamados por Vergnaud(1993) de pontos de filiação . No entanto, o procedimento de resolver problemas multiplicativos, como soma de parcelas iguais, pode ocasionar em aprendizagens mal formuladas pelos estudantes, como a ideia de que a multiplicação sempre leva ao aumento do valor, e isso nem sempre ocorre em todos conjuntos numéricos. Por exemplo, quando multiplicamos: 0,3 x 0,3 = 0,09, observe que o resultado do produto é menor que os valores multiplicados. Nesse caso, podemos perceber a existência de uma separação entre esses conceitos, considerados por Vergnaud (1993) como ponto de ruptura.

Professor(a), observe que existe uma diferença conceitual entre o invariante operatório utilizado para resolver o problema aditivo e o invariante operatório do problema multiplicativo.

Nesse contexto, Nunes *et al*., (2005) consideram existir uma diferença entre essas duas operações em termos conceituais. Para ela, as situações aditivas permitem serem analisadas a partir de um invariante operatório, conhecido como **"relação-parte-todo**", que significa somar as partes, para encontrar o valor total, ou subtrair do todo o valor de uma parte, para encontrar o valor da outra parte, enquanto as situações multiplicativas são caracterizadas pela presença de uma **regularidade entre duas grandezas ou duas variáveis.**

Professor(a), essa regularidade representada por um valor fixo ou taxa entre as duas grandezas ou variáveis caracteriza a multiplicação como uma relação de proporcionalidade, conforme destaca Gitirana *et al*., (2014).

Fonte: Bitmoji.

Como vimos, a **proporção** é um conceito que pertence ao Campo Multiplicativo. Por isso consideramos importante enfatizar, nesta cartilha, os aspectos desse campo conceitual. Na sequência, abordaremos o conteúdo de proporção, os problemas e as representações resolutivas que dão sentido a esse conceito.

3. PROPORCIONALIDADE

Contexto

A proporção é um conceito do Campo Multiplicativo, cuja importância transcende os domínios da Matemática, encontrando aplicação em diversas áreas do conhecimento.

É um conceito presente em diversas situações comuns do cotidiano, como na ideia de divisão de objetos em partes iguais entre pessoas, receitas culinárias, velocidade média percorrida por um veículo em um determinado espaço de tempo ou distância (Vergnaud, 1983).

Fonte: Freepik.

Definição

Nos livros didáticos, é comum encontrar a definição de proporção ou proporcionalidade como uma igualdade entre duas razões. Neste contexto, definiremos proporção como uma relação constante em duas grandezas ou variáveis (Nunes, 2003). Essa relação é caracterizada pela presença de uma taxa fixa ou razão, denominada de constante de proporcionalidade.

Problemas de Proporção

Os **problemas de proporção** são situações que envolvem relações proporcionais entre variáveis, como os conhecidos problemas de regra de três simples e composta. Os **conceitos** relacionados a esses problemas podem ser: a relação direta e inversa, função linear, porcentagens, taxas, razão, entre outros conceitos.

Exemplo de um problema de proporção

Problema 1. Na merenda escolar, é fundamental fornecer aos estudantes uma alimentação equilibrada. Para garantir isso, a merendeira adota a proporcionalidade entre a quantidade de carboidratos e proteínas servidas nas refeições. Por exemplo, para cada 100 gramas de carboidratos, são utilizadas 50 gramas de proteínas. Se a merendeira utilizou 150 gramas de proteínas em uma refeição, quantas gramas de carboidratos são necessárias para manter essa proporção no prato do aluno?


Fonte: Freepik.

Problema extraído do protocolo de pesquisa do Participante P4 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto adaptado).

Quais os aspectos que caracterizam essa situação como um Problema de proporção?

✓ **A presença da proporcionalidade**

O problema 1, no contexto da proporcionalidade, é conhecido como um problema de regra de três simples, por relacionar apenas duas grandezas: quantidades de carboidratos e de proteínas. Observa-se que o conceito que permite tratar dessa situação é a **relação proporcional direta** apresentada entre as duas grandezas.

✓ **Contexto realista e próximo da vivência dos estudantes para explorar o conceito proporcionalidade**

Observa-se que a professora utilizou o contexto da merenda escolar, que faz parte do dia a dia dos estudantes, para explorar o conceito de proporção. Além disso, o contexto dessa situação permite estabelecer relação com conteúdos da área de Ciências da Natureza, como abordar a importância de uma alimentação equilibrada e discutir sobre o valor nutricional apresentado no problema.

✓ **Informações claras e dados numéricos necessários à resolução.**

O contexto do enunciado possibilita uma compreensão clara das informações e comando da questão, bem como os dados numéricos apresentados possibilitam chegar ao resultado da questão.

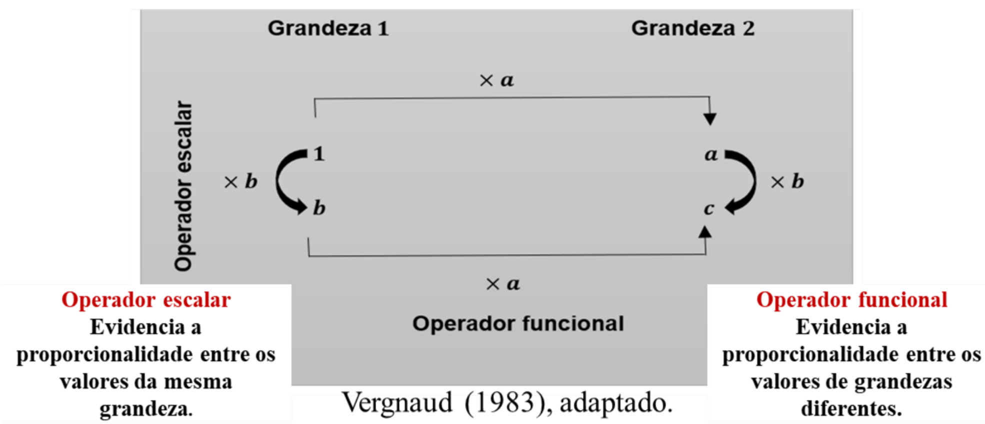
Professor(a), esses aspectos são importantes e devem ser observados no momento de elaborar ou selecionar problemas matemáticos para trabalhar com os estudante, visando à construção de aprendizagens mais consistentes.

Antes de discutirmos com mais detalhes os tipos de problemas de proporcionalidade, inclusive os de regra de três composta, consideramos importante abordar os métodos de resolução apontados por Vergnaud para problemas proporcionais.

Quais são os métodos de resolução propostos por Vergnaud para os problemas de proporção?

Professor(a), com o objetivo de destacar a proporcionalidade presente nas situações quaternárias, Vergnaud (1983; 2009) propõe a resolução dos problemas de proporção por meio de um diagrama (esquema), que oferece uma representação mais clara do conceito de proporção nessas situações, simplificando o processo de resolução. O esquema formulado é representado por dois operadores: escalar e funcional, conforme detalharemos a seguir.

Diagrama proposto por Vergnaud para situações de Relação Quaternária.



Vergnaud (1983), adaptado.

O **operador escalar** consiste no transporte da razão ou taxa que associa 1 a b, na Grandeza 1, para associar de igual modo, a e c na Grandeza 2, de maneira proporcional.

O operador funcional tem a finalidade de transportar para a linha que associa b a c, a razão, que associa 1 a a, evidenciando a relação de proporcionalidade existente entre as duas grandezas diferentes, por meio do **coeficiente angular** da função linear (razão) da Grandeza 1 para a Grandeza 2.

4. ELABORANDO E RESOLVENDO PROBLEMAS DE PROPORÇÃO

Professor(a), agora que apresentamos o esquema de resolução proposto por Vergnaud, abordaremos, a seguir, os tipos de problemas de proporção.

Destacamos que alguns problemas apresentados neste contexto foram elaborados por professores participantes do estudo, que deu origem a esta cartilha, enquanto outros foram e formulados pelos autores deste material. A partir desses problemas, daremos dicas de como elaborar e resolver problemas proporcionais.

Quais os tipos de problemas de proporção que serão abordados neste contexto?

Diante da amplitude dos conceitos relacionados ao conteúdo de proporção, são inúmeras as situações-problema que podem ser desenvolvidas nesse contexto. No entanto, abordaremos nesta cartilha, alguns exemplo de situações multiplicativas da Relação Quaternária.

O que é a Relação Quaternária?

As Relações Quaternárias são definidas como relações que apresentam uma correspondência entre quatro medidas (valores), sendo duas medidas de uma determinada grandeza e as outras duas medidas de outro tipo de grandeza.

Visando tornar a compreensão mais clara sobre o que é uma relação quaternária, a seguir, traremos um exemplo.

Exemplo de um problema de Relação Quaternária

Em um determinado posto de combustível, 10 litros de gasolina custam R\$ $70,00$. Qual o valor pago por uma pessoa que abastecer seu veículo com 25 litros de gasolina nesse posto?

Professor(a), observe que o problema apresenta duas grandezas: quantidade de litros de gasolina e valor pago, cada uma apresentando dois valores. Veja que são valores que se relacionam dois a dois, isto é, a quantidade de 10 litros de gasolina está relacionado ao valor de 70,00 reais, enquanto o valor de 25 litros de gasolina ao valor a ser determinado.

Como os problemas de proporção estão organizados no contexto da Relação Quaternária?

Enquanto situações multiplicativas, os problemas de proporção são organizados quanto a sua estrutura conceitual e características apresentadas, em:

- **três eixos:** proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla;
- **duas classes de correspondência:** “um para muito” e “muitos para muitos”
- **dois tipos de grandezas:** discretas e contínuas.

Na sequência, abordaremos de forma exemplificada a estrutura e características dos problemas de proporção de cada eixo e de cada classe de correspondência, enfatizando os tipos de grandezas envolvidas, juntamente com dicas de resolução que destacam as operações aplicáveis.

Ressaltamos que a organização das situações de proporção adotada nesta cartilha é uma releitura desenvolvida por Magina, Merlini e Santos (2016) da estrutura de situações multiplicativas proporcionais apresentadas por Vergnaud.

Proporção Simples

Os problemas de proporção simples são caracterizados pela relação entre duas grandezas distintas, envolvendo quatro elementos que se relacionam, dois a dois, mediante uma taxa fixa.

Exemplificando os problemas de Proporção Simples

Problema 2 - Um pedreiro cobra o valor de R$ 60,00 por m² de parede emassada. Quanto ele deve receber se for contratado para realizar o serviço em 120 m²?

Problema extraído do protocolo de pesquisa do Participante P8 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto transcrito conforme escrito no protocolo de pesquisa).

Professor (a), veja que o problema 2 é caracterizado pela relação entre duas grandezas: "área de parede emassada" e "valor cobrado pelo serviço". Perceba que os problemas denominados de regra de três simples, no contexto da relação quaternária, são os problemas de proporção simples.

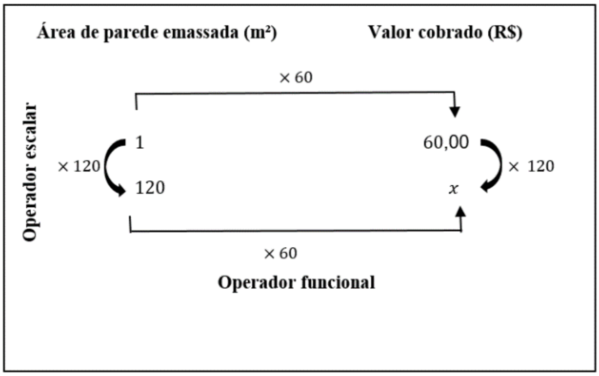
Observe que a relação de proporcionalidade é evidenciada por meio da informação, por 1 m² de parede emassada é cobrado R$ 60,00. Como o valor pago por 1m² de parede emassada é explicito no enunciado, esse problema é caracterizado como um problema de proporção simples da classe "um para muito".

Professor(a), a **classe de correspondência "um para muitos"** diz respeito aos problemas que relacionam uma unidade de uma grandeza, com diversas unidades da outra grandeza. Isso significa que o valor unitário relacionado a uma grandeza aparece de forma explicita no enunciado.

A seguir, observe o esquema de resolução para este problema.

Resolução do Problema 2.

Diagrama proposto por Vergnaud (1983) para o Problema 2 - Proporção Simples.



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Professor (a), observe que o problema foi elaborado de forma adequada, apresentando de maneira clara as informações necessárias à resolução e explora a relação de **proporcionalidade direta** entre as grandezas. Porém, perceba que a presença explícita do valor unitário da grandeza facilita a resolução do problema, permitindo ser solucionada pela multiplicação do valor de 1 m² de parede emassada pela medida da área total de 120 m² (60 x 120), resultando em 7 200 reais, conforme pode ser observado no esquema de resolução apresentado. O tipo de grandeza apresentado no comando do problema é contínuo, uma vez que o valor pago em reais pode ser representado por um valor não inteiro.

Dizemos que um problema está relacionado a um tipo de **grandeza contínua** quando, no comando da questão, a grandeza em destaque pode ser representada por valores não inteiros, ou seja, são grandezas que podem ser divididas em infinitas partes. Por exemplo: fatias de bolo, tempo, distância percorrida, velocidade média, entre outras.

E dizemos que uma **grandeza é discreta** quando a grandeza em destaque no comado da situação não permite ser representada por valores não inteiros, como exemplo, quantidade de estudantes em uma sala, quantidades de torneiras, quantidade de pedreiros, entre outras.

Ressaltamos que, no contexto dos problemas proporção simples, é importante que o(a) professor(a), ao elaborar problemas dessa natureza, evite explicitar no enunciado o valor relacionado a unidade da grandeza, com a finalidade de tornar a situação mais complexa. Além disso, que envolva, nas elaborações, grandezas diversificadas, tanto contínua como discreta.

Na sequência, apresentaremos outro exemplo de uma problema do eixo da proporção simples.

Problema 3. Uma boleira consegue produzir 3 bolos em 4 horas. Quanto tempo essa boleira levaria para produzir 6 bolos?

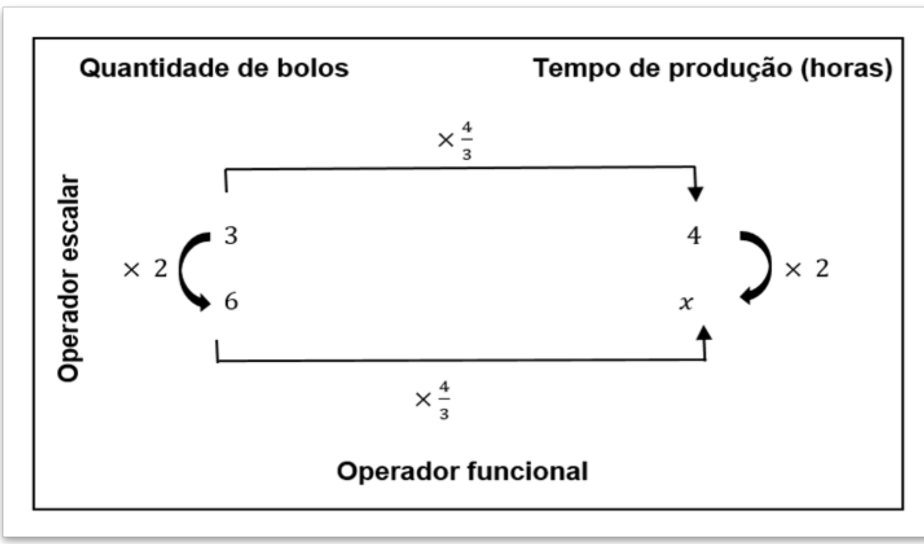
Problema extraído do protocolo de pesquisa do Participante P10 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto transcrito conforme escrito no protocolo de pesquisa).

Professor(a), observe que, no problema 3, temos a presença de duas grandezas: quantidade de bolos e tempo de produção. Porém, perceba que o contexto aborda uma **relação diretamente proporcional** partindo de uma quantidade diversa de bolos, que se relaciona com outra quantidade diversa na grandeza tempo. Em outras palavras, o valor unitário da grandeza não está explícito no enunciado. Nesse caso, temos um problema de **proporção simples da classe de correspondência "muitos para muitos**", cuja definição apresentaremos a seguir.

A classe “muitos para muitos” corresponde às situações que relacionam uma quantidade diversa de unidades de uma grandeza com outra quantidade diversa da outra grandeza, ou seja, são problemas em que o valor unitário da grandeza não é explicitado no enunciado, conforme observamos no problema 3 apresentado.

A seguir, apresentaremos o esquema de resolução do problema 3, onde podemos observar melhor suas características.

Diagrama de Vergnaud (1983) para Problema 3 - Proporção Simples.



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Professor(a), veja que este problema pode ser solucionado considerando a análise dimensional das quantidades de bolos, tendo em vista que o valor de 6 bolos é o dobro (operador escalar) do valor inicial (3 bolos) e, dessa forma, é possível obter o tempo necessário para a produção de 6 bolos, multiplicando o tempo de 4 horas pelo operador escalar 2, conforme o esquema de resolução apresentado.

Além disso, também é possível que o estudante realize uma análise entre as grandezas e encontre o valor unitário referente à grandeza “quantidade de bolos”, através da divisão. Esse processo permite identificar que o tempo necessário para produzir um bolo é de $\frac{4}{3}$ de horas (operador funcional). Em seguida, será possível multiplicar esse valor para determinar o tempo de produção de 6 bolos, que será de: $6 \times \frac{4}{3} = 8$ horas. Nesse caso, a grandeza relacionada a esse problema é a grandeza contínua, uma vez que a unidade de medida de tempo pode ser representada por valores não inteiros.

Professor(a), observe que o problema 3, embora seja de proporção simples e apresente um enunciado curto, o fato de o elaborador considerar na formulação a relação proporcional que parte de valores diversos, ou seja, que não parte do valor unitário da grandeza, acrescentou, na situação, um grau de complexidade mais elevado, em comparação ao problema 2 apresentado anteriormente. Situações-problema dessa natureza possibilitam que o estudante mobilize diversos invariantes operatórios no processo de resolução.

No contexto da proporção simples, esse é um tipo de problema do ponto de vista conceitual e das operações mobilizadas mais sofisticado. Situações como essa são mais indicadas para serem exploradas com estudantes do anos finais do Ensino Fundamental, e estão mais alinhadas com a proposta da Teoria dos Campos Conceituais e as habilidades do Currículo de Pernambuco para essa etapa de ensino.

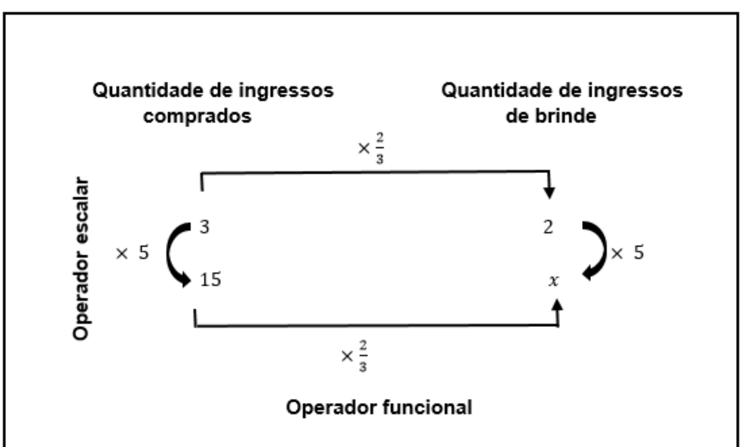
A seguir, apresentaremos uma outra situação-problema de proporção simples da classe “muitos para muitos” com uma estrutura diferente das apresentadas anteriormente.

Problema 4. Em um torneio de futsal, os ingressos para a final estão sendo vendidos com a seguinte promoção especial: na compra de três ingressos, o comprador recebe dois ingressos adicionais de brinde. Se uma pessoa decidir adquirir 9 ingressos, quantos ingressos adicionais ela receberá como brinde?

Percebe-se que se trata de um problema de proporção simples, pois relaciona apenas duas grandezas: quantidade de ingressos comprados e ingressos adicionais de brinde, de maneira **diretamente proporcional**; da classe **"muitos para muitos**", pois não parte do valor unitário da grandeza, e envolve **grandeza discreta**, uma vez que não poderá se obter meio ingresso, ou seja, a quantidade de ingressos tem que ser representada por valores inteiros.

A resolução desse problema pode ser realizada fazendo-se uso do operador escalar ou dimensional, conforme detalhado no esquema de resolução apresentado a seguir.

Diagrama de Vergnaud (1983) para Problema 4 - Proporção Simples.



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Porém, perceba que, nessa situação, o elemento unitário não está definido e não possibilita ao estudante reduzir a relação à classe “um para muitos”. Isso ocorre porque o contexto não permite chegar a um número inteiro de ingressos adicionais para a compra de um ingresso. Consequentemente, os estudantes precisarão empregar outras estratégias para encontrar a solução.


Fonte: Bitmoji.

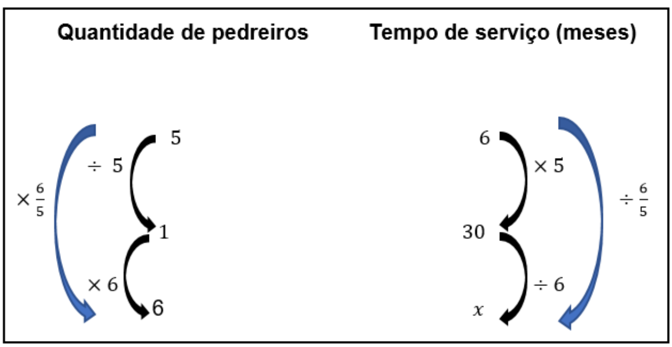
Professor (a), quando buscamos diversificar os problemas abordados em sala de aula, é crucial considerarmos a relação de correspondência entre as grandezas. Nos exemplos de problemas de proporção simples, apresentados anteriormente, pudemos notar a presença da relação diretamente proporcional entre as variáveis. Portanto, é essencial ampliar nossa abordagem para, além disso, incluir também problemas que envolvam a relação inversa entre as grandezas. Dessa forma, estaremos contemplando uma gama mais ampla de conceitos de proporcionalidade, enriquecendo a compreensão dos alunos. A seguir, apresentaremos uma situação de proporção simples, envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Problema 5: Cinco pedreiros levam 6 meses para construir um prédio. Em quantos meses seis pedreiros construiriam esse mesmo prédio?

Problema extraído do protocolo de pesquisa do Participante P10 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto transcrito conforme escrito no protocolo de pesquisa).

Podemos observar que esse problema apresenta um contexto, que permite explorar a relação de correspondência **inversamente proporcional** entre as grandezas "quantidade de pedreiros" e o "tempo" para a execução do serviço. Como são grandezas que se relacionam na ordem inversa, ao multiplicar a quantidade de pedreiros por um determinado valor, o tempo para construção do prédio é reduzido na mesma proporção, ou seja, fica dividido por esse valor; se reduzir a quantidade de pedreiros, o tempo de construção aumentará na mesma proporção, conforme apresentado no esquema de resolução.

Diagrama de Vergnaud (1983) para o Problema 5 – Proporção Simples.



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

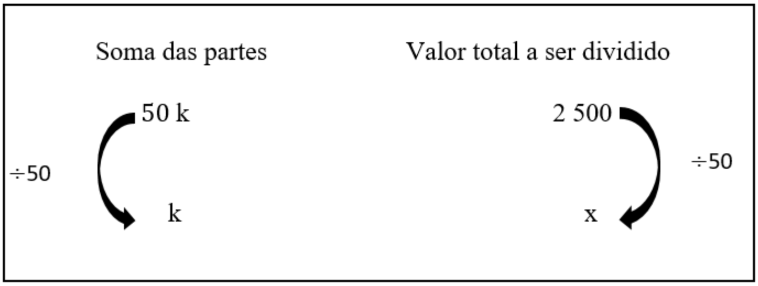
O estudante também pode reduzir o problema à classe de "um para muitos", dividindo a quantidade pedreiros por 5, na sequência, como é uma relação inversa, multiplica o tempo de serviço (6 meses) por 5, encontrando 30 meses. Dando prosseguimento, relaciona o valor encontrado com a quantidade pretendida que é 6 pedreiros. Para isso, multiplica por 6, e dividindo por 6 o valor relacionado à grandeza tempo (30 ÷ 6), encontrado a resposta, 5 pedreiros.

Professor(a), é importante observar que, embora seja uma situação de enunciado simples e objetivo, a relação inversamente proporcional entre as grandezas e a inclusão de números não múltiplos, tornou a situação mais complexa, exigindo raciocínios mais elaborados na resolução e a utilização de mais invariantes operatórios.

Nesse contexto, ainda podemos explorar os problemas de proporção simples denominados de **divisão diretamente** e **inversamente proporcional**, conforme exemplificaremos a seguir.

Problema 6 - A avó de Natália decidiu presenteá-la, juntamente com seus dois irmãos, Pedro e Luiz. Para isso, ela optou em dividir, proporcionalmente, a idade dos três netos, o valor de R$ de 2 500,00. Sabendo que Natália tem 19 anos, Pedro 17 e Luiz 14 anos, quantos reais cada um recebeu?

De acordo com o enunciado do problema, a divisão é proporcional às idades de cada neto, ou seja, o valor de cada um é diretamente proporcional à sua idade x. Logo, tem-se uma função do tipo $y = k.x$, onde k é a constante de proporcionalidade. Dessa forma, chamando Natália, Pedro e Luiz, respectivamente, de a,b e c, e tomando suas idades, temos que o valor recebido por cada um será: $a = 19k$; $b=17k$ e $c= 14k$. Prosseguindo, vemos que a soma das partes proporcionais, corresponde a $19k + 17k + 14k= 50\ k$. Desse modo, fazendo uso do diagrama proposto por Vergnaud (1983) para resolver problema de proporção simples, temos:



Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Logo, o valor x relacionado a k é igual a 50. Desse modo, Natália recebeu: 50 x 19 = 950,00; Pedro: 50 x 17= 850,00 e Luiz: 50 x 14 = 700,00.

Como exemplo de um problema de divisão inversamente proporcional, apresentaremos o seguinte exemplo.

Problema 7. A mãe de Júlia, Bruna e Antônio, ao término do primeiro semestre do ano letivo, decidiu presentear os três filhos dividindo entre eles R$360,00 de maneira inversamente proporcional ao número de falta que tiveram na disciplina Matemática. Ao analisar o boletim dos filhos, ela observou que Júlia teve 3 faltas, Bruna 4 faltas e Antônio 6 faltas. Nesse caso, quanto cada um deles recebeu?

Ao contrário do problema anterior, a divisão do valor total se dará de maneira inversamente proporcional às faltas acumuladas por cada um dos estudantes. Nesse caso, considerando y o valor que cada um vai receber e x a quantidade de faltas, podemos escrever a função inversa: y=k/x , sendo k a taxa de proporcionalidade entre o valor total e a parte que cada um vai receber. Chamando Júlia, Bruna e Antônio, respectivamente de a, b e c, temos que o valor recebido por cada um será:

$a = \frac{k}{3}$; $b = \frac{k}{4}$ e $c = \frac{k}{6}$. Logo teremos que, $\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = \frac{4k+3k+2k}{12} = \frac{9\,k}{12}$.

Desse modo, temos:

	Soma das partes	Valor total a ser dividido	
	$\frac{9k}{12}$	360,00	
$\div \frac{9}{12}$			$\div \frac{9}{12}$
	k	x	

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Assim, o valor de k = 480. Desse modo, a parte recebida por a= 480/3 =160,00; b=480/4 = 120 e c = 480/6=80.

Professor(a), com base na estrutura das situações-problema apresentadas para o eixo de proporção simples, podemos perceber que se trata de problemas de um nível de complexidade elementar. No entanto, dependendo dos elementos considerados na elaboração dos enunciados, essas situações podem se tornar mais complexas e desafiadoras para os estudantes. Portanto, na elaboração ou seleção de problemas dessa natureza, é importante analisarmos cuidadosamente os componentes envolvidos, como os conceitos e as operações mobilizadas.

Na sequência, abordaremos os problemas de **proporção dupla** e **múltipla**, geralmente conhecidos como problemas de **regra de três composta**.

Problemas de Proporção Dupla

Os problemas de Proporção Dupla são caracterizados pela relação entre mais de duas grandezas, envolvendo quatro quantidades que estabelecem uma relação proporcional, duas a duas, entre si.

Exemplificando os problemas de Proporção Dupla

Problema 8. Seis máquinas de impressão realizam 600 impressões em uma hora. Se três dessas máquinas forem desligadas, qual será a quantidade de impressões realizadas nas mesmas condições em uma hora?

Problema extraído do protocolo de pesquisa do Participante P5 – pesquisa vinculada à Dissertação que deu origem a esta cartilha (Texto transcrito conforme escrito no protocolo de pesquisa).

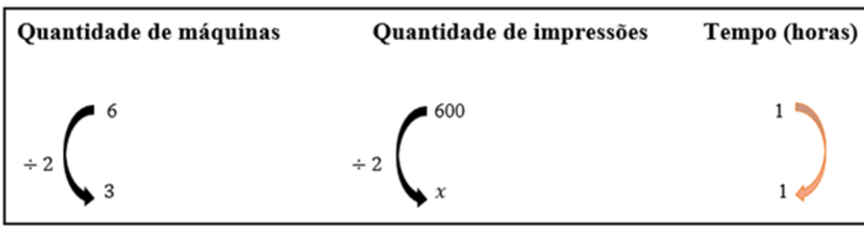
Observe que o problema relaciona mais de duas grandezas distintas: quantidade de máquinas, quantidade de impressões e tempo. Perceba que, se aumentar a quantidade de máquina, impacta no aumento da quantidade de impressões, mas não altera o valor da grandeza tempo. Semelhantemente, se aumentar o tempo de funcionamento das máquinas, aumentará a quantidade de impressões, mas não alterará o número de máquinas. Então perceba que são grandezas que se relacionam duas a duas, entre si.

Um ponto importante a observar nesse problema é que o professor, ao elaborá-lo, fixou a grandeza "tempo" em 1 hora. Observando o esquema de resolução que apresentaremos a seguir, percebe-se que esses aspecto diminui a complexidade do problema, uma vez que a análise proporcional será realizada apenas entre duas grandezas, não havendo necessidade de uma relação entre as três grandezas apresentadas.

Agora, observe a seguinte situação de Proporção Dupla.

Problema 9. Como voluntária de uma organização que cuida de cachorros em situação de abandono, Maria percebeu que, para alimentar dois cachorros adultos por um dia, gasta 900 g de ração. Qual a quantidade de ração que Maria vai precisar para alimentar 14 cachorros adultos durante 7 dias?

Diagrama de Vergnaud (1983) para o Problema 8 - Proporção Dupla



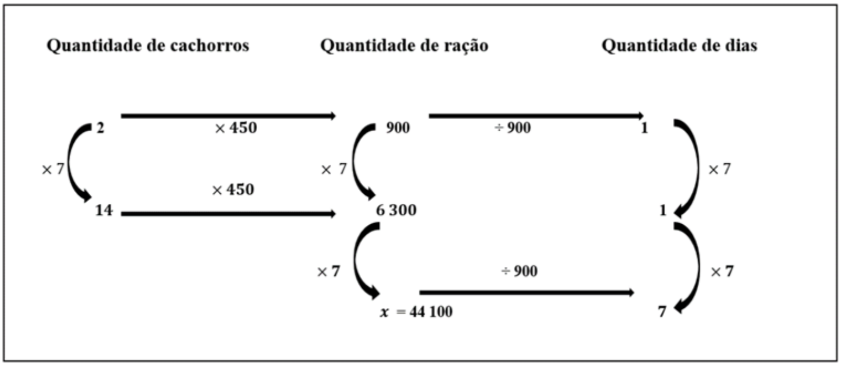
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores (2024)

Professor(a), observe que a situação-problema, apresentada acima, explora no contexto da proporcionalidade, a relação entre três grandezas distintas: “quantidade de cachorros, quantidade de ração e dias. Essas grandezas se relacionam duas a duas, de forma independente. Isso significa, por exemplo, que, ao dobrar a quantidade de cachorros, é necessário dobrar a quantidade de ração, mas a quantidade de dias permanece inalterada.

O mesmo acontece se ampliar a quantidade de dias; a quantidade de ração deverá ser ampliada na mesma proporção, mas não significa que tenhamos que ampliar a quantidade de cachorros.

A seguir, apresentaremos um esquema de resolução para essa situação de Proporção Dupla.

Diagrama de Vergnaud (1983) para o Problema 9 - Proporção Dupla.



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores (2024)

Observe que, devido à variação das três grandezas, a análise e resolução do problema tornaram-se mais complexas em comparação ao problema 8, apresentado anteriormente, em que o valor de uma das grandezas não varia. Nesse sentido, temos que: 900 g de ração alimentam 2 cachorros, durante 1 dia. Como a quantidade de cachorro passou a ser $14 = 2 \times 7$, então serão necessários 900 × 7= 6 300 g de ração para alimentar esses animais durante 1 dia. Além disso, o número de dias também aumentou em 7 vezes. Logo, devemos ter 6 300 × 7 = 44 100 g de ração para alimentar os 14 cachorros por 7 dias.

Outra maneira de explorar essa situação é utilizando a noção de função. Perceba que, pelos dados do problema, são necessários 450 g de ração para alimentar 1 cachorro em 1 dia. Dessa forma, podemos definir uma função que determina a quantidade de ração necessária para alimentar x cachorros durante y dias da seguinte forma:

$$f(x, y) = 450 \cdot x \cdot y$$

Para o nosso exemplo, temos 14 cachorros que devem ser alimentados por 7 dias. Assim, obtemos:

$$f(14{,}7) = 450 \cdot 14 \cdot 7$$
$$= 44\,100$$


Fonte: Bitmoji.

Professor(a), é importante enfatizar que problemas que envolvem mais de duas grandezas demandam do estudante raciocínios mais complexos. Perceba que essas situações requerem uma habilidade mais avançada das relações conceituais e do processo de resolução. São problemas que oportunizam os estudantes a explorarem as proporcionalidades em contextos mais difíceis.

Problemas de Proporção Múltipla

Os problemas de Proporção Múltipla são caracterizados pela relação proporcional entre mais de duas grandezas, duas a duas, mantendo uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas.

Exemplificando os problemas de Proporção Dupla

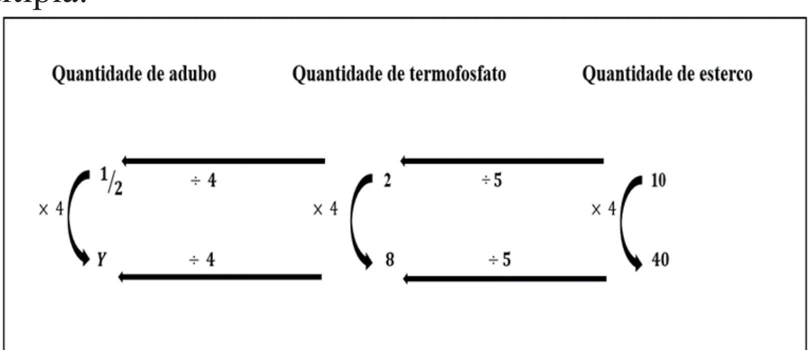
Problema 10. No plantio do mamão papaia, recomenda-se, na adubação básica, utilizar uma mistura feita por 10kg de esterco, 2kg de termofosfato e $\frac{1}{2}$ kg de adubo em cada cova por sulco. Pretendendo-se manter a proporcionalidade dos compostos utilizados, qual a quantidade de adubo necessária para preparar uma mistura composta por $40kg$ de esterco e $8kg$ de termofosfato?

Essa situação envolve três grandezas. A quantidade de esterco, a quantidade de termofosfato e a quantidade de adubo. As quantidades que representam cada grandeza apresentam uma dependência entre si.

Uma característica desse tipo de situação, é que, se aumentarmos a quantidade relacionada a uma grandeza, por exemplo, a quantidade de termofosfato, também será necessário o aumento da quantidade de adubo. De forma análoga, acontecerá com as outras grandezas, se caso, qualquer uma delas for aumentada ou reduzida.

Diferente do que ocorre com as grandezas que compõem uma situação de proporção dupla, em uma situação de proporção múltipla, ao modificar o valor de uma grandeza, os valores das outras grandezas envolvidas na situação serão modificados na mesma proporção, conforme podemos observar no esquema de resolução apresentado a seguir.

Diagrama de Vergnaud (1983) para o Problema 10 - Proporção Múltipla.



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores (2024)

Professor(a), observe que a situação-problema relaciona a quantidade de esterco, de termofosfato e de adubo. Ademais, perceba que tanto a quantidade de esterco quanto a de termofosfato quadriplicou. Dessa forma, se quisermos manter a proporcionalidade, devemos multiplicar a quantidade de adubo por 4, ou seja, $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ kg.

Tal problema também pode ser explorado da seguinte maneira:

Observe , que relacionando a quantidade de termofosfato e a quantidade esterco, temos:

Quantidade de esterco		Quantidade de termofosfato
10	$\div 5$	2
40	$\div 5$	8

Note que a quantidade de termofosfato é $\frac{1}{5}$ da quantidade esterco. Assim, podemos definir uma função que relaciona a quantidade de termofosfato x em relação à quantidade esterco:

$$f(x) = \frac{1}{5}x$$

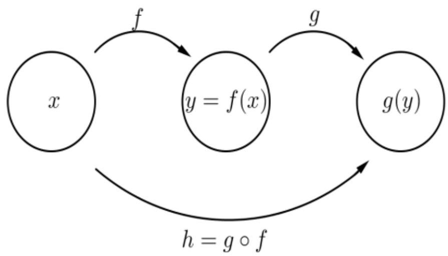
Agora, relacionando a quantidade adubo e a quantidade de termofosfato, temos:

Quantidade de termofosfato		Quantidade de adubos
2	$\div 4$	12
8	$\div 4$	2

Observe que a quantidade de adubo é $\frac{1}{4}$ da quantidade de termofosfato. Dessa forma, podemos definir uma função que relaciona a quantidade de adubo com a quantidade de termofosfato da seguinte forma:

$$g(x) = \frac{1}{4}x.$$

Assim, podemos relacionar a quantidade de adubo com a quantidade de estercos, através da seguinte função composta:



Tal que:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= (g \circ f)(x) \\
&= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{5}x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x\right) \\
&= \frac{1}{20}x
\end{aligned}
$$

Note que, quando $x = 40$, temos: $h(x) = \frac{1}{20} \cdot 40 = 2.$

Fonte: Bitmoji.

Importante!

Professor (a), embora seja possível abordar o conceito de composição de funções no contexto das situações de proporções múltiplas, com ênfase na representação algébrica, é importante ressaltar que, no ensino de proporcionalidade nos anos finais do Ensino Fundamental, o foco deve ser direcionado para a compreensão das relações de correspondência direta e inversa. É fundamental que os estudantes do 6º ao 9º ano compreendam, primeiro, as conexões entre as grandezas antes de avançarem no estudo da proporcionalidade no contexto das funções compostas.

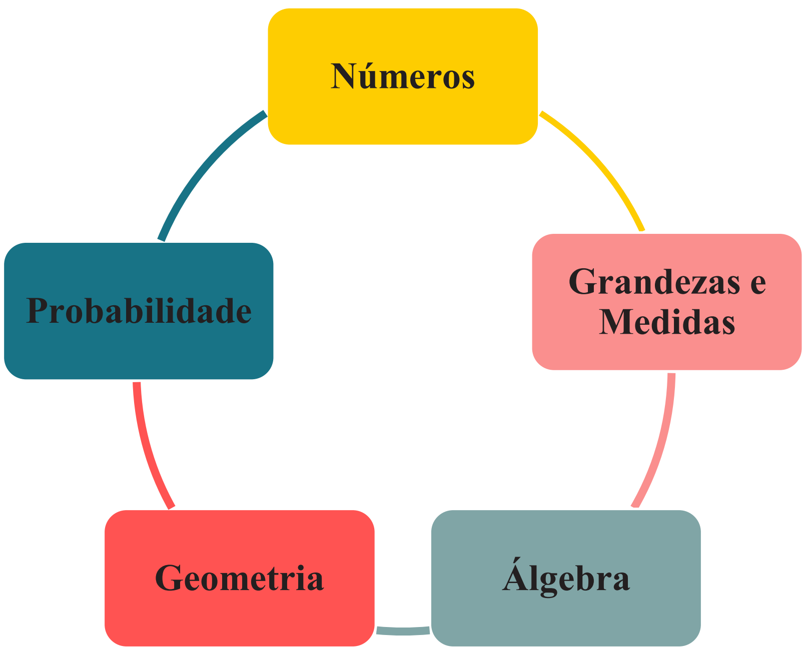
Como vimos, na perspectiva do Campo Conceitual Multiplicativo, existem diversos tipos de problemas que podem ser considerados ao explorar o conceito de proporcionalidade. Nesse sentido, de um potencial inquestionável, a Elaboração de Problemas torna-se um recurso importante no processo de ensino da Matemática, por contribuir para a ampliação e compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, tanto para o professor como para o estudante. Além disso, facilita o processo de ensino dos conteúdos matemáticos, ao possibilitar que o professor leve para sala de aula problemas que:

- ✓ articulem diferentes conceitos;
- ✓ explorem um conceito de diferentes maneiras e em diferentes níveis de complexidade;
- ✓ possibilitem avaliar as aprendizagens construídas pelos estudantes, bem como aquelas que precisam de um aprofundamento;
- ✓ estejam de acordo com a realidade e o interesse dos estudantes;
- ✓ estimulem a criatividade e criticidade;
- ✓ promovam novas possibilidades de intervenção e melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem.

Professor (a), conforme discutido anteriormente, os problemas proporcionais, enquanto situações multiplicativas, podem ser organizados e diversificados de acordo com as categorias enfatizadas. Além disso, a prática de elaboração de problemas contribui para explorar problemas diversificados e alinhados com os objetivos desejados. Desse modo, em relação aos **documentos curriculares,** os problemas de proporcionalidade são abordados a partir dos objetos de conhecimento e das habilidades organizadas em Unidades Temáticas, conforme detalharemos a seguir.

5. O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DO DOCUMENTOS CURRICULARES

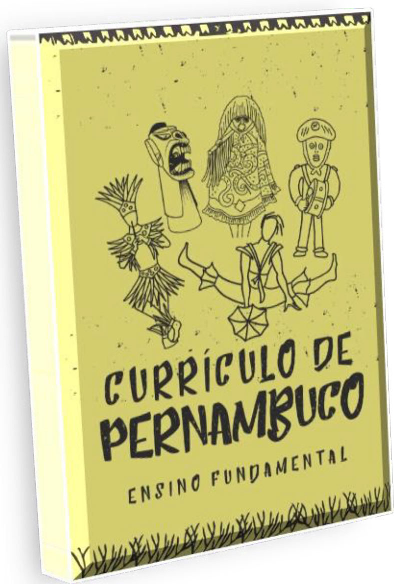
No que diz respeito ao conjunto de aprendizagem Matemática para o Ensino Fundamental, a BNCC (2018) e o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019) orientam o desenvolvimento das habilidades a partir de cinco Unidades Temáticas:



Nesses documentos curriculares, essas unidades temáticas são consideradas como contextos que estão relacionados e se articulam por meio de ideias fundamentais no desenvolvimento do pensamento tais como **proporcionalidade**, **equivalência**, **ordem**, **variação** e **interdependência**.

Como estão organizadas essas Unidades Temáticas nos documentos curriculares?

Cada **Unidade Temática** é composta pelos seus **objetos de conhecimentos**, que são os conteúdos, conceitos e processos e o conjunto de **habilidades** que expressam as aprendizagens essenciais que os estudantes precisam desenvolver ao longo de cada etapa escolar.



Quais são os objetos de conhecimentos e as habilidades propostos pelo Currículo de Pernambuco para o ensino da proporcionalidade nos anos finais do Ensino Fundamental?

Para o desenvolvimento do pensamento proporcional entre estudantes do 6º ao 9º ano, este documento apresenta um conjunto de habilidades relacionadas a diferentes objetos de conhecimento dentro do contexto das Unidades Temáticas de **Números**, **Grandezas e Medidas**, **Álgebra** e **Geometria**, conforme apresentaremos a seguir.

NÚMEROS

- **Porcentagem**
  - Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- **Perímetro de um quadrado**
  - Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado, ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado.

ÁLGEBRA

- **Grandeza diretamente proporcionais e inversamente proporcionais**
  - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
- **Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.**
  - Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

GEOMETRIA

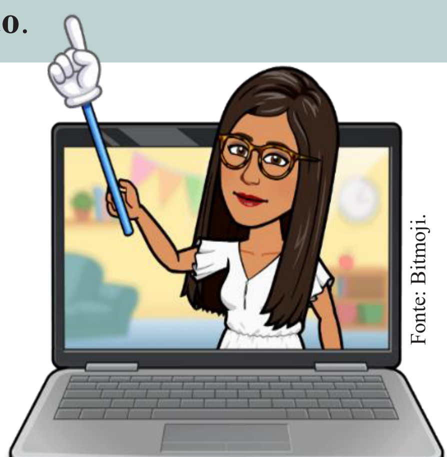
- **Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano**
  - Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro, verificando as proporções entre os segmentos.
- **Semelhança de triângulos**
  - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, explorando o conceito de proporcionalidade.
- **Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade**
  - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: (Pernambuco, 2019), adaptado.

Como o Currículo de Pernambuco orienta a resolução de problemas de proporção?

Este documento orienta que os estudantes sejam estimulados a resolverem problemas de proporção por meios de estratégias pessoais e diversificadas, sem fazer uso do método “regra de três”.

Professor (a), reconhecemos a utilidade do método “regra de três” na resolução de problemas de proporção e não contestamos seu uso. No entanto, ressaltamos que sua abordagem não deve se limitar ao aspecto algorítmico da proporção, contudo enfatizar a compreensão das relações proporcionais envolvidas. Nesse contexto, Ávila (1986) ressalta que esse mecanismo, aplicado como propriedade fundamental da proporção, na qual “o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”, é, na realidade, uma propriedade das igualdades que deve ser trabalhada no contexto das equações, e seu ensino não deve deixar no estudante a impressão de que seja uma propriedade exclusiva de razão e proporção.



Fonte: Bitmoji.

6. PROBLEMAS DE PROPORÇÃO CONFORME O CURRÍCULO DE PERNAMBUCO

Como seria uma situação-problema que exemplifica os conteúdos e habilidades, relacionados ao ensino de proporcionalidade, apontados em cada Unidade Temática do Currículo de Pernambuco?

À guisa de exemplificação, formulamos alguns problemas de proporcionalidade, para que você, professor, pense a respeito dos problemas proporcionais relacionados ao aos conteúdos, conceitos e habilidade apontados nas Unidades Temáticas de Números, Grandezas e Medidas, Álgebra e Geometria, como forma de elaborar problemas que contemplem esse conceito de forma ampla e conectada com outros domínios matemáticos.

NÚMEROS

- **Porcentagem**
  - Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade.

Exemplos de Problemas de Proporção

1. Lino decidiu investir uma parte do seu salário em um fundo de investimento. Ele percebeu que, ao longo do último ano, o fundo apresentou um rendimento de 8% ao mês. Se, inicialmente, Lino investiu R$ 5 000,00, quanto ele terá ao final de 12 meses, mantendo-se o rendimento mensal de 8%?

2. Fátima é vendedora de um determinado produto que custa R$ 80,00 a unidade. A cada 3 unidades do produto vendido ela ganha de bônus do 10% sobre o valor das unidades vendidas. Na última semana, Fátima vendeu um total de 12 unidades desse produto. Qual foi o valor total que ela recebeu como bônus nessa semana?

3. Anderson e Ana decidem investir dinheiro em uma caderneta de poupança. Inicialmente, Anderson investiu 3.000,00 reais, enquanto Ana decidiu investir 5.000,00 reais. No final do primeiro mês, Anderson verificou que o saldo de sua conta na poupança foi de 3.150,00 reais. Qual o saldo da conta poupança de Ana nesse mesmo período?

Professor (a), por que esses problemas de proporção são da Unidade Temática de Números?

Perceba que são problemas que exploram o conceito de proporcionalidade juntamente com o conceito de porcentagem, que é um conteúdo da Unidade Temática de Números. Ao invés de pensar apenas no conceito de proporção, o estudante deverá mobilizar também conhecimentos sobre a porcentagem para solucioná-los, estabelecendo uma conexão entre esses conceitos, assim como propõe a habilidade delineada nesse contexto.

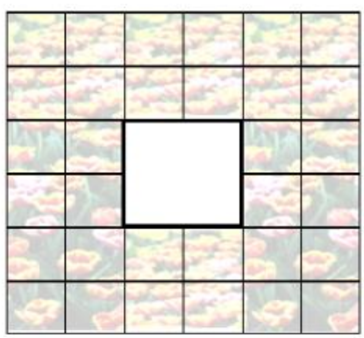
GRANDEZAS E MEDIDAS

- **Perímetro de um quadrado**
  - Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado, ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado.

Exemplos de Problemas de Proporção

1. A equipe gestora da escola Jornalista Assis Chateaubriand está organizando os convites para o festejo junino da escola. Cada convite é um quadrado com lados medindo 12 centímetros. Para decorar as bordas dos convites, eles decidiram colar fitilhos coloridos. Desconsiderando os desperdícios, a equipe utilizou, aproximadamente, 7,20 metros de fitilhos na confecção dos convites. Quantos convites foram confeccionados por essa equipe?

2. Maria está planejando criar um jardim quadrado em seu quintal, e para dar um toque especial, ela decidiu plantar flores nas bordas do jardim, deixando um quadrado vazio no centro, conforme figura abaixo. O perímetro desse quadro vazio é de 8 metros. Se o lado do jardim é o triplo da medida do lado do quadrado vazio, qual o perímetro do jardim planejado por Maria?



3. Antônio foi encarregado de limpar um terreno, que tem a forma de um quadrado com 40 metros de lado. Se Antônio conseguiu concluiu essa tarefa em 2 dias, quantos dias ele levará para executar a limpeza em um outro terreno, também quadrado, com 60 metros de lado?

Quais são os aspectos desses problemas que os classificam como problemas da Unidade de Grandezas e Medidas?

Professor(a), é importante observar que esses problemas não apenas tratam do conceito de proporcionalidade, mas também abordam o conceito de área e perímetro de um quadrado de forma contextualizada. Esses problemas oferecem uma oportunidade para os alunos compreenderem que, em um quadrado, o perímetro é proporcional à medida dos lados, conforme proposto pela habilidade relacionada à proporcionalidade na Unidade Temática de Grandezas e Medidas.

ÁLGEBRA

- **Grandeza diretamente proporcionais e inversamente proporcionais**
  - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

- **Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.**
  - Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Exemplos de Problemas de Proporção

1. Laura está planejando preparar um bolo de milho verde para contribuir com a festa junina de sua escola. Ao revisar a receita de bolo de milho verde da sua avó, ela percebeu que, para cada

400 g de milho verde, deve adicionar 3 ovos e para cada ovo deve adicionar 50 g de farinha de trigo. Desejando aumentar a receita, ele optou por 800 g de milho verde. Para manter a proporcionalidade entre os ingredientes da receita, quantos gramas de farinha de trigo Laura deve adicionar?

2. No sítio de Sr. Manoel, uma cisterna com capacidade de 8 000 litros, quando completamente cheia, atende às necessidades diárias com um consumo médio de 400 litros, proporcionando um período de abastecimento de 20 dias. Desejando ampliar a capacidade de armazenamento de água, o Sr. Manoel planeja construir uma nova cisterna, que seja capaz de suprir suas necessidades por 30 dias, considerando um consumo médio de 600 litros diário. Qual deve ser a capacidade dessa nova cisterna?

3. (Adaptado – protocolo de pesquisa Participante P6) - João, Pedro e Paulo decidiram se unir para investir em um negócio. João investiu R$ 2.300,00, Pedro contribuiu com R$ 1.000,00 e Paulo decidiu investir R$ 700,00. Após um período, o negócio obteve um lucro total de R$ 20.000,00. Eles concordaram em dividir esse valor de forma diretamente proporcional ao valor inicial investido por cada um. Determine quanto cada um receberá.

Professor (a), no contexto da Álgebra, além dos problemas de proporção simples, é possível diversificar as formulações com problemas de proporção dupla , múltipla e envolvendo a divisão em partes proporcionais.

GEOMETRIA

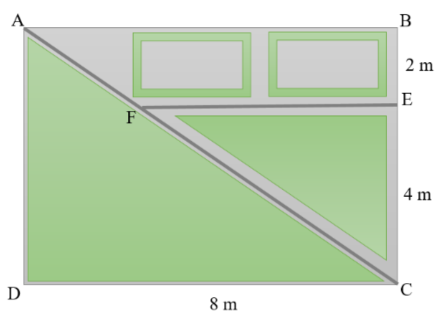
- **Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano**
  - Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro, verificando as proporções entre os segmentos.
- **Semelhança de triângulos**
  - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, explorando o conceito de proporcionalidade.
- **Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade**
  - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Exemplos de Problemas de Proporção

1. Após uma aula de Matemática sobre figuras semelhantes, dois estudantes, Robson e Luís, decidiram aplicar os conhecimentos adquiridos de forma prática, medindo a altura de um prédio. Inicialmente, eles mediram o comprimento da sombra do prédio, que resultou em 8 metros. Em seguida, Robson mediu o comprimento da sombra de Luís, que possui uma altura de 1,78 metros, e obteve 0,4 metros. Com esses dados, qual é a altura real do prédio em metros?

2. Um agricultor deseja cercar um terreno triangular com tela, sabendo que esse terreno é semelhante a um que ele já havia cercado e que possui a medida de um de seus lados igual a 50 m, tendo gasto 300 m de tela para cercá-lo. No novo terreno, a medida do lado correspondente ao primeiro mede 150 m. Quantos metros de tela serão necessários para cercar o segundo terreno?

3. Alícia planeja construir um jardim em um terreno retangular com lados medindo 6 metros e 8 metros. Para isso, ela desenhou a planta baixa do jardim, na qual ela dividiu o jardim em três partes, duas triangulares e uma no formato de um trapézio, conforme figura apresentada abaixo. Para que as medidas reais correspondam exatamente às medidas apresentadas no desenho, Alícia precisa determinar onde ficará o ponto F. Para isso, ela precisa determinar a medida do segmento CF. Qual deverá ser a medida do seguimento CF para que o jardim de Alícia saia conforme planejado?



Quais são os conceitos geométricos abordados nesses problemas em conexão com a proporcionalidade?

Professor(a), nos problemas apresentados, observam-se conceitos como semelhança de triângulos e aplicação do teorema de Pitágoras, que podem ser explorados juntamente com a proporcionalidade.

Prezados professores e professoras,

Fonte: Bitmoji.

Encerramos esta etapa do nosso diálogo, mas nosso desejo é que esta cartilha se torne um recurso útil e valioso para enriquecer sua prática docente. Esperamos que a leitura deste material desperte seu interesse e curiosidade, estimulando-os na elaboração e resolução de problemas relacionados à proporção.

Acreditamos que uma compreensão clara da proporcionalidade, aliada à sua e aplicação de maneira significativa, pode proporcionar uma experiência de aprendizado mais enriquecedora e eficaz para os estudantes.

Portanto, esta cartilha é um convite para que vocês continuem explorando novas abordagens no ensino da proporção em suas aulas, criando, assim, um ambiente de aprendizado mais estimulante e envolvente.

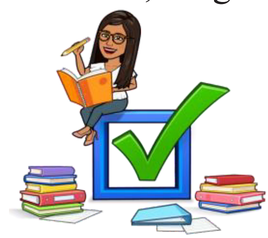
Esperamos que as dicas e reflexões aqui apresentadas os incentivem a elaborar ou selecionar problemas relevantes e a experimentar diferentes estratégias, orientando seus estudantes na compreensão e resolução de problemas de proporção. Mais do que simplesmente fornecer respostas corretas, é fundamental auxiliá-los a compreender os processos e os raciocínios por trás das soluções, cultivando, assim, um ambiente de aprendizado consistente dos conceitos matemáticos.

Nosso diálogo sobre a cartilha pode prosseguir por meio do seguinte canal de comunicação:

cilane.goncalves@upe.br
ernani.santos@upe.br

PARA SABER MAIS

Professor (a), para aprofundar mais seus conhecimentos sobre a Teoria dos Campos Conceituais e sobre o ensino da Matemática, especialmente da Proporcionalidade, seguem algumas sugestões de leituras.



Fonte: Bitmoji.

Teoria dos Campos Conceituais

https://vergnaudbrasil.com/

https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerardvergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-ecolocada-em-pratica

Proporção

https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-deensinar-proporcao

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

SANTOS, Ernani Martins; LAUTERT, Sintria Labres. Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores [recurso eletrônico] : contribuições da Psicologia da Educação Matemática / (Org.). SANTOS, E. M.; LAUTERT, S.L. Rio de Janeiro, Autografia, 2020.

SPINILLO, Alina Galvão. Ensinando Proporção a crianças: Alternativas Pedagógicas em sala de aula. GEPEM. Nº43, p. 11 – 43, 2003.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 8, p. 1-8, 1986a.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. Ed. 1. São Paulo, Ática, 2009.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. Ed. 1. **PROEM**, São Paulo, 2014.

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera; SANTOS, Aparecido dos. A Estrutura Multiplicativa à luz de Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, Aires e cols. **Matemática, Cultura e Tecnologia**: Perspectivas internacionais. Curitiba: CRV Editora, 2016.

NUNES, Terezinha. **É hora de ensinar proporção**. Revista Nova Escola. Ano XVII, n. 161. São Paulo, 2003.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação matemática: números e operações numéricas**. São Paulo. Cortez, 2005.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco: ensino fundamental** / Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação; coordenação Ana Coelho Vieira Selva, Sônia Regina Diógenes Tenório ; apresentação Frederico da Costa Amâncio, Maria Elza da Silva. Recife : A Secretaria, 2019.

SANTOS, Ernani Martins; LAUTERT, Sintria Labres. Um Olhar para as Estruturas Multiplicativas em Livros de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Anais. Uberlândia(MG) Uberlândia, 2021.

SANTOS, Ernani Martins. A Resolução de situações-problema de comparação multiplicativa por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.In: MAGINA, S.M. P; LAUTERT, S.L;SPINILLO, A.G. (Org.). **Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática teoria, pesquisa e sala de aula** [livro eletrônico. 1. ed. -- Brasília, DF : SBEM Nacional, 2022.

SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Sintria Labres; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; SANTOS, Ernani Martins; SILVA, Juliana Ferreira Gomes. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 928-946, dez. 2017.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983.

VERGNAUD, Gérard. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la répresentation. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. **Psychologie Française**, 30, 245-252, 1985.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do **1º Seminário Internacional de Educação Matemática** do Rio de Janeiro. p. 1-26.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade – problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender?: por que a teoria dos campos conceituais? In: GROSSI, E. P. (org.). O que é aprender?: o iceberg da conceitualização. Porto Alegre: **GEEMPA**, 2017. p. 15-53.

Créditos de Imagens
https://www.Freepik..com/fre-vector/hand-drawn-microlearning-eillustration_

SOBRE OS AUTORES

MARIA CILANE GONÇALVES DA SILVA

Mestra em Educação - Programa de Pós-Graduação em Formação de Professores e Práticas Interdisciplinares (2024). Especialista em Docência em Matemática e Práticas Pedagógicas - Universidade Cândido Mendes (2017) e em Educação Matemática - Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (2011). Licenciatura em Matemática - Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (2010).

ERNANI MARTINS DOS SANTOS

Doutor em Psicologia Cognitiva - linha de pesquisa Educação Matemática e Conceitos Científicos pela Universidade Federal de Pernambuco. Mestre em Ensino das Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (2003).

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (1999).

Discutindo o ensino de proporção: perspectivas sobre a elaboração e resolução de problemas

No âmbito da Educação Matemática, a prática de elaboração de problemas pelo professor tem emergido como uma estratégia didática fundamental para aproximar os conteúdos escolares dos contextos reais dos estudantes. Essa abordagem permite que, nós professores, possamos formular novos problemas ou reformular problemas existentes, considerando a realidade dos nossos estudantes e as habilidades que desejamos desenvolver com os problemas propostos.

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
91985661194
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
Tv. Quintino Bocaiúva, 2301, Sala 713, Batista Campos,
Belém - PA, CEP: 66045-315

9 786558 897620 >