

# UMA PROPOSIÇÃO DE CURSO DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO COM FOCO EM VESTIBULARES MILITARES

---

Felix Horacio Munoz Muniz Junior

**UMA PROPOSIÇÃO DE CURSO  
DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO  
PARA O ENSINO MÉDIO COM  
FOCO EM VESTIBULARES  
MILITARES**



Todo o conteúdo apresentado neste livro é de  
responsabilidade do(s) autor(es).  
Esta obra está licenciada com uma Licença  
Creative Commons Atribuição-SemDerivações  
4.0 Internacional.

## Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA  
(Editor-Chefe)  
Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA  
Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Raquel Silvano Almeida-Unespar  
Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro  
Prof<sup>a</sup>. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG  
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves-IFF  
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ  
Prof. Dr. Rodrigo Luiz Fabri-UFJF  
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE  
Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA  
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos-UEL  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Maria de Fatima Vilhena da Silva-UFPA  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Dayse Marinho Martins-IEMA  
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM  
Prof.<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Elane da Silva Barbosa-UERN  
Prof. Dr. Piter Anderson Severino de Jesus-Université Aix Marseille

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

*Equipe RFB Editora*

Felix Horacio Munoz Muniz Junior

**UMA PROPOSIÇÃO DE CURSO  
DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO  
PARA O ENSINO MÉDIO COM  
FOCO EM VESTIBULARES  
MILITARES**

1ª Edição

Belém-PA  
RFB Editora  
2023

© 2023 Edição brasileira  
by RFB Editora  
© 2023 Texto  
by Autor  
Todos os direitos reservados

RFB Editora  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
www.rfbeditora.com  
adm@rfbeditora.com  
91 98885-7730

Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA,  
CEP 66035065

**Editor-Chefe**

Prof. Dr. Ednilson Souza

**Diagramação**

Worges Editoração

**Revisão de texto e capa**

Autor

**Bibliotecária**

Janaina Karina Alves Trigo Ramos

**Produtor editorial**

Nazareno Da Luz

**Catálogo na publicação**  
**Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166**

M966p

Muniz Junior, Felix Horacio Munoz

Uma proposição de curso de introdução ao cálculo para o ensino médio com foco em vestibulares militares / Felix Horacio Munoz Muniz Junior. – Belém: RFB, 2023.

38 p.; 16 X 23 cm

ISBN 978-65-5889-536-7

DOI 10.46898/rfb.cb133753-eb4c-4a2b-be78-3458b8d3b693

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ensino médio. 3. Vestibular. I. Muniz Junior, Felix Horacio Munoz. II. Título.

CDD 510.07

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática - Estudo e ensino

# SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO .....	7
CAPÍTULO 1	
O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E OS VESTIBULARES MILITARES .....	9
CAPÍTULO 2	
PROPOSTA E ESTUDO DE CASO DE CURSO DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO COM FOCO EM VESTIBULARES MILITARES .....	21
ÍNDICE REMISSIVO .....	35
SOBRE O AUTOR .....	36



# APRESENTAÇÃO

As escolas militares de graduação em engenharia são referências de ensino neste segmento. Os processos seletivos dessas instituições incluem provas escritas que são tradicionalmente conhecidas pelo alto nível exigido dos candidatos.

Uma análise das provas aplicadas pelo Instituto Militar de Engenharia (IME) e Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), revelou que, mesmo não sendo atualmente um item constante nos conteúdos programáticos, a utilização do Cálculo (Diferencial e Integral) consiste em uma eficiente alternativa de resolução para algumas questões de matemática.

No Brasil, o Cálculo já fez parte dos conteúdos lecionados no ensino médio tendo sido abandonado em uma reforma de ensino ocorrida na década de 1960. Diversos autores acreditam que a inserção do Cálculo no ensino médio é possível e benéfica para os estudantes. Como parte da preparação diferenciada que os exames do IME e do ITA exigem, este trabalho propõe um Curso de Introdução ao Cálculo para estudantes do 3º ano do ensino médio que almejam a carreira militar. Como estudo de caso, o curso proposto foi desenvolvido em uma turma de 33 alunos do Colégio e Pré-Vestibular Bernoulli de Belo Horizonte MG, obtendo resultados satisfatórios de compreensão e capacidade de utilização do Cálculo pelos alunos.



# CAPÍTULO 1

## O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E OS VESTIBULARES MILITARES

## 1 INTRODUÇÃO

A carreira militar é o objetivo de um grande número de estudantes no Brasil. Motivados pela estabilidade, oportunidade de bons salários, bem como pelo status social, cada vez mais jovens têm se interessado em seguir essa carreira. O ingresso no serviço militar ocorre através dos colégios e academias que formam oficiais. Por sua vez, o ingresso nessas escolas se dá por processos seletivos que incluem provas escritas (com questões objetivas e dissertativas), testes físicos e exames médicos.

No que se referem às provas escritas, os vestibulares militares são tradicionalmente conhecidos pelo alto grau de aprofundamento que é exigido para a resolução de suas questões. Diversos conteúdos que comumente não são cobrados nos vestibulares tradicionais, fazem parte da rotina desses exames.

Dentre as instituições militares destacam-se, tanto pela elevada concorrência quanto pela exigência de suas provas, o Instituto Militar de Engenharia (IME) e o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA). As provas da disciplina matemática, nos exames de acesso a essas instituições, são comumente consideradas como as mais difíceis. Atualmente, nos conteúdos programáticos para essas provas não consta o Cálculo Diferencial e Integral (que neste trabalho será tratado simplesmente como Cálculo). No entanto, uma análise dos exames anteriores aplicados por essas instituições, mostra que a ferramenta Cálculo é de grande ajuda para a resolução de diversas questões, mostrando-se até mesmo como a única solução viável (considerando o tempo de prova) para algumas delas.

É nesse contexto que o presente trabalho teve como objetivo final a proposição de um Curso de Introdução ao Cálculo a ser ministrado para estudantes do último ano do ensino médio, que

desejam ingressar na carreira militar, como parte da preparação diferenciada que esses vestibulares exigem.

Vale ressaltar que o contato com o Cálculo no ensino médio, gera a possibilidade de um maior entendimento, não só da matemática de um modo geral, mas também de disciplinas afetas como a física e a química, melhorando o desempenho dos estudantes também nestas disciplinas.

A pesquisa qualitativa a que se propôs este trabalho consistiu em uma revisão bibliográfica acerca da inserção do Cálculo no ensino médio, visando fundamentar a hipótese do benefício de ensinar este conteúdo já nesse nível. Na sequência, foram analisadas diversas provas de matemática, dos principais vestibulares de instituições militares no Brasil (IME e ITA), onde foi possível exemplificar a eficiência da ferramenta Cálculo para a resolução das questões cobradas nesses exames. A análise dessas provas possibilitou a proposição de um Curso de Introdução ao Cálculo com foco em vestibulares militares. Por fim, foi desenvolvido o curso proposto em uma turma de 33 alunos do 3º ano do Colégio Bernoulli em Belo Horizonte- MG, onde foram coletados dados através da observação, como o nível de entendimento dos alunos, os questionamentos feitos durante as aulas e a assimilação do conteúdo através da capacidade de utilização da ferramenta Cálculo para a resolução de problemas de vestibulares de instituições militares.

## **2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas mais importantes da matemática, pois constitui uma ferramenta com a qual é possível modelar e descrever fenômenos nas mais diversas áreas do

conhecimento, como química, física, astronomia, engenharias, ciências biológicas e, inclusive, ciências sociais.

O problema central do Cálculo Diferencial (derivadas) trata-se de determinar a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente a uma curva, em um ponto dado. Sendo essa curva a representação gráfica da relação entre duas grandezas, a inclinação da reta tangente em um ponto nos fornece a taxa de variação instantânea de uma grandeza em relação a outra neste ponto. Segundo Stewart (2005), sempre que resolvemos um problema de reta tangente não estamos resolvendo apenas um problema geométrico. Implicitamente estamos resolvendo uma grande quantidade de problemas envolvendo taxas de variação, que ocorrem em todas as ciências naturais, exatas e até mesmo sociais.

O problema central do Cálculo Integral, consiste na determinação de áreas com fronteiras curvas. Tanto quanto as derivadas, as integrais também possuem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Alguns exemplos de aplicações que ilustram tal versatilidade são: o cálculo do fluxo sanguíneo através de uma artéria, a determinação da quantidade de diluição de um corante em certos testes fisiológicos e a determinação do trabalho necessário para enviar uma sonda espacial para outros planetas (SWOKOWSKI,1994).

Segundo Stewart (2006), as origens do Cálculo remontam a Grécia antiga, quando há pelo menos 2500 anos atrás os gregos já utilizavam o chamado “método da exaustão” para determinar as áreas de figuras curvas. Ao longo dos séculos, diversos matemáticos deram contribuições para a formação do Cálculo como o conhecemos hoje. O ápice ocorreu no século XVII quando Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), de forma independente, descobriram o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece a profunda relação existente entre os dois ramos dessa disciplina: a diferenciação e a integração (MELCHIORS e SOARES, 2013). O teorema fundamental

do cálculo é um dos resultados mais importantes e poderosos da matemática. Ele estabelece uma conexão (aparentemente inexistente) entre a diferenciação e a integração, mostrando que essas duas operações são essencialmente inversas uma da outra. O teorema afirma que a integral de uma função no intervalo  $[a, b]$  pode ser calculada encontrando uma função primitiva da função e avaliando-a nos limites  $a$  e  $b$ . Essa relação entre integração e diferenciação permite-nos calcular de forma eficiente integrais definidas e tem uma ampla gama de aplicações em áreas como física, engenharia e economia. O teorema fundamental do cálculo é uma pedra angular do estudo do cálculo e desempenha um papel fundamental na compreensão e análise de uma variedade de fenômenos.

Em resumo, o cálculo diferencial e integral é um campo fundamental da matemática que fornece ferramentas poderosas para a compreensão e análise de uma ampla variedade de fenômenos. Ele desempenha um papel central em muitas áreas da ciência e da engenharia, permitindo a modelagem matemática, a solução de problemas práticos e o avanço do conhecimento humano. O estudo do cálculo não apenas aprimora as habilidades matemáticas, mas também desenvolve o pensamento analítico e a capacidade de resolver problemas complexos.

### **3 SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO NO NÍVEL SECUNDÁRIO**

No Brasil, o Cálculo fez parte dos conteúdos programáticos de matemática das escolas de nível secundário em dois períodos. O primeiro em 1890, quando o então primeiro ministro Benjamin Constant, através de um decreto, reformulou o ensino secundário eliminando disciplinas tradicionais como o latim e o grego e incluindo o ensino de matemática concreta e abstrata. Com isso, o Cálculo

Diferencial e Integral foi incluído no terceiro ano (TORRES e GIRAFFA, 2009). O segundo período ocorreu no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942. Com essa reforma, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral constou no currículo escolar oficialmente até 1961 (CARVALHO, 1996). Segundo Ávila (2001), no início da década de 1960, houve uma reformulação no ensino de matemática através de um movimento denominado Matemática Moderna, que buscou ampliar o rigor e o formalismo de como eram apresentados os conteúdos matemáticos aos alunos. A busca excessiva pela formalidade demandava mais tempo para a apresentação da matéria e, como consequência dessa nova mentalidade, alguns conteúdos, entre eles o Cálculo Diferencial e Integral, foram preteridos do ensino secundário.

De acordo com Busse e Soares (2007) alguns livros didáticos do ensino médio ainda apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, no entanto esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, deixando estes conteúdos restritos ao ensino superior. Um questionamento pertinente é se, limites, derivadas e integrais, são assuntos possíveis de serem assimilados por alunos do ensino médio. Silva e Souza (2014) defendem que se considerarmos o ensino do Cálculo com todo o rigor das definições, teoremas, demonstrações e simbologias, a resposta a esse questionamento seria negativa. No entanto, abdicando-se do excesso de formalismo, as ideias gerais apresentadas de forma intuitiva estão ao alcance dos alunos desse nível. Ademais, observa-se o fato de que em diversos países o ensino de Cálculo no nível secundário é uma realidade.

Para Oliveira (2010), a inserção das ideias do Cálculo no ensino médio possibilitaria que o estudo de diversas propriedades das funções, tais como máximos, mínimos, concavidade, comportamento assintótico dentre outros, fossem absorvidos com maior naturalidade

pelos alunos. Observa-se ainda, que algumas ideias do Cálculo estão presentes em outras disciplinas do ensino médio. Na física, por exemplo, tem-se que a velocidade de uma partícula é a taxa de variação de sua posição em relação ao tempo. Por sua vez, a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo é denominada aceleração da partícula. Isso mostra que as ideias da cinemática trazem consigo, implicitamente, o conceito de taxa de variação entre grandezas. De acordo com Ávila (1991), sem utilizar as noções de derivada, o professor de física no 2º grau (atual ensino médio), tem de fazer uma ginástica complicada para apresentar as ideias de movimento uniformemente variado. O ofício seria bem mais simples para o professor e muito mais compreensível para os alunos se o ensino desse tema fosse feito à luz da noção de derivada. Segundo Silva e Souza (2014) o Cálculo é uma das grandes ferramentas matemáticas e dada tamanha importância deve-se tratar da conveniência de incluí-lo no ensino médio, devido sua grande relevância na resolução de problemas.

#### **4 O IME E O ITA**

Localizado na Praia Vermelha do Rio de Janeiro, o Instituto Militar de Engenharia (IME) é um estabelecimento de ensino do Departamento de Ciência e Tecnologia (DCT) responsável, no âmbito do Exército Brasileiro, pelo ensino superior de Engenharia e pela pesquisa básica. Ministra cursos de graduação, pós-graduação e extensão universitária para militares e civis. Insere-se no Sistema de Ciência e Tecnologia do Exército, cooperando com os demais órgãos, por meio da prestação de serviços e pela execução de atividades de natureza técnico-científicas. Através de processo seletivo anual, oferece vagas para a graduação de engenharia nas seguintes especialidades: Fortificação e Construção (Engenharia Civil), Elétrica, Eletrônica, Comunicações, Mecânica e de Armamento, Mecânica e de

Automóveis, Materiais, Química, Cartográfica e Computação (Fonte: <http://www.ime.eb.br/ime.html>, acesso em 18/03/2017).

O Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) é uma instituição universitária pública ligada ao Comando da Aeronáutica (COMAER). Está localizado no Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA), na cidade paulista de São José dos Campos. Especializado nas áreas de ciência e tecnologia no Setor Aeroespacial, o ITA oferece através de processo seletivo anual vagas para o curso de graduação em engenharia nas seguintes especialidades: Aeronáutica, Eletrônica, Mecânica-Aeronáutica, Civil-Aeronáutica, Computação e Aeroespacial. Criado em 1950, por inspiração do Marechal Casimiro Montenegro Filho e intensa cooperação internacional, o ITA é considerado um centro de referência no ensino de engenharia no Brasil (Fonte: <http://www.ita.br/info>, acesso em 18/03/2017).

#### **4.1 O Cálculo nos vestibulares do IME e do ITA**

Assim como ocorreu no ensino médio, o Cálculo já fez parte dos programas de diversos vestibulares no país, tendo sido extinto à medida que tal conteúdo já não era abordado nas escolas de nível secundário.

Segundo informações obtidas nas próprias instituições, o Cálculo deixou de constar nos conteúdos programáticos das provas de matemática dos vestibulares do IME e do ITA em 1995 e na década de 1960, respectivamente. No entanto, uma análise das provas aplicadas por estes Institutos nas últimas duas décadas, mostrou que a utilização do Cálculo para a resolução de algumas questões, mostra-se uma alternativa bastante eficiente em relação aos métodos de resolução tradicionalmente utilizados no ensino médio. Essa eficiência pode ser avaliada tomando como base o tamanho e a praticidade da resolução,

que por sua vez reflete no tempo que é necessário para resolvê-la. Para ilustrar tal ideia, as seções 4.1.1 e 4.1.2 apresentam duas questões contempladas nos vestibulares do ITA e do IME, respectivamente, e suas resoluções com e sem a utilização do Cálculo.

#### 4.1.1 Questão de matemática do processo seletivo 2011 do ITA

**Enunciado:** Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação  $x^4 + x^2 + ax + b = 0$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $a^2 - b^3$  é igual a

- A)-64                      B)-36                      C)-28                      D)18                      E)27

(Fonte: [http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica\\_2011.pdf](http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2011.pdf), acesso em 21/03/17).

#### Solução 1: Sem a utilização do Cálculo

Como 1 é raiz dupla da equação  $x^4 + x^2 + ax + b = 0$ , o polinômio  $P(x) = x^4 + x^2 + ax + b$ , é divisível por  $(x - 1)^2$ .

Façamos, então, duas sucessivas divisões por  $(x - 1)$  e igualaremos os restos a zero.

Por Briot-Ruffini, dividimos  $P(x)$  por  $(x - 1)$ :

1	1	0	1	a	b
	1	1	2	2+a	2+a+b
					resto

O quociente dessa divisão é divisível por  $(x - 1)$ :

1	1	1	2	2+a
	1	2	4	6+a
				resto

Igualando os restos à zero, temos:

$$\begin{cases} 2 + a + b = 0 \\ 6 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -6 \end{cases}$$

Logo,  $a^2 - b^3 = -28$ .

(Fonte: <http://www.bernoulliresolve.com.br/2011/ita/3dia/index.html#aba8>, acesso em 21/03/17)

## Solução 2: Com a utilização do Cálculo

Como 1 é raiz dupla da equação  $x^4 + x^2 + ax + b = 0$ , o polinômio  $P(x) = x^4 + x^2 + ax + b$  admite 1 como raiz dupla e a sua derivada  $P'(x) = 4x^3 + 2x + a$  admite 1 como raiz simples. Então:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -6 \end{cases}$$

Logo,  $a^2 - b^3 = -28$ .

(Fonte: <http://www.bernoulliresolve.com.br/2011/ita/3dia/index.html#aba8>, acesso em 21/03/17)

### 4.1.2 Questão de matemática do processo seletivo 2012 do IME

**Enunciado:** A equação da reta tangente à curva de equação  $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$  no ponto  $P(8,3)$  é

A)  $2x + 3y - 25 = 0$    B)  $x + y - 11 = 0$    C)  $3x - 2y - 18 = 0$    D)  $x + 2y - 14 = 0$

E)  $3x + 2y - 30 = 0$

(Fonte: [http://www.ime.eb.br/arquivos/Admissao/Vestibular\\_CFG/Provas\\_Anteriores/provas11\\_12/ProvaObjetiva\\_CA\\_CFG\\_2011\\_2012.pdf](http://www.ime.eb.br/arquivos/Admissao/Vestibular_CFG/Provas_Anteriores/provas11_12/ProvaObjetiva_CA_CFG_2011_2012.pdf), acesso em 21/03/17).

#### Solução 1: Sem a utilização do Cálculo

Seja  $r: y = ax + b$  a reta procurada. Como  $P(8,3) \in r \rightarrow 3 = 8a + b \rightarrow b = 3 - 8a$ . Logo  $r: y = ax + (3 - 8a)$ .

Como  $r$  é tangente à curva de equação  $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ , o sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 100 = 0 & (1) \\ y = ax + (3 - 8a) & (2) \end{cases}$$

tem solução única. Substituindo (2) em (1) tem-se:

$$x^2 + 4(ax + (3 - 8a))^2 - 100 = 0 \rightarrow (1 + 4a)x^2 + (24a - 64a^2)x + (256a^2 - 192a - 64) = 0$$

Como o sistema tem solução única, o discriminante desta última equação deve ser nulo. Logo:

$$(24a - 64a^2)^2 - 4(1 + 4a)(256a^2 - 192a - 64) = 0$$

$$\rightarrow 576a^2 + 768a + 256 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{-768 \pm \sqrt{768^2 - 4 \times 576 \times 256}}{2 \times 576} = \frac{-2}{3}$$

Portanto  $r: y = \frac{-2}{3}x + \frac{25}{3}$ . Multiplicando a equação por três e isolando os termos segue que  $r: 2x + 3y - 25 = 0$ .

(Fonte: Elaborada pelo autor).

**Solução 2:** Com a utilização do Cálculo

Derivando implicitamente, temos que:  $2x + 8y \cdot y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$ .

Substituindo o ponto  $P(8,3)$ , temos o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto:  $m = \frac{-8}{4 \times 3} = \frac{-2}{3}$ .

Logo, a reta tangente no ponto P é dada por:  
 $y - 3 = \frac{-2}{3}(x - 8) \rightarrow 2x + 3y - 25 = 0$ .

(Fonte: <http://www.bernoulliresolve.com.br/2012/ime/1dia/index.html#aba8>, acesso em 21/03/2017).



# CAPÍTULO 2

**PROPOSTA E ESTUDO DE CASO DE  
CURSO DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO  
PARA O ENSINO MÉDIO COM FOCO EM  
VESTIBULARES MILITARES**

# 1 PROPOSIÇÃO DE CURSO

## 1.1 Título do curso

O curso proposto será denominado como *Curso de Introdução ao Cálculo*. Como este será destinado a estudantes do ensino médio e sua execução deverá ocorrer em instituições desse nível, não se faz necessário maiores informações no título.

## 1.2 Objetivos do curso

O Curso de Introdução ao Cálculo tem como objetivos fornecer uma visão geral do Cálculo Diferencial e Integral, ampliar o universo matemático de situações-problemas possíveis de serem estudados pelos participantes, proporcionar novas alternativas na resolução de problemas matemáticos de vestibulares militares, possibilitar um maior entendimento e aprofundamento de disciplinas afetas como a física e a química e também servir de preparação para a disciplina Cálculo, a ser cursada pelo participante em sua graduação.

## 1.3 Público alvo

O curso é destinado aos estudantes do terceiro ano do ensino médio, especialmente àqueles que desejam pleitear vagas em instituições militares. No entanto, o mesmo pode ser estendido, sem prejuízos, a todos os estudantes do terceiro ano interessados no assunto.

## 1.4 Pré requisitos

Para que o aluno consiga acompanhar plenamente os conteúdos abordados no curso são necessários conhecimentos prévios

de alguns tópicos da matemática, em nível básico. São eles: funções elementares (afim, quadrática, polinomial, exponencial, logarítmicas e trigonométricas), trigonometria (relações no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico), geometria plana (conceitos de ângulos, distâncias e áreas nos mais diversos elementos geométricos) e geometria espacial (conceitos de planos de intersecção, superfícies e volumes dos sólidos elementares). Estes conteúdos relacionados, segundo o PCN+ Ensino Médio- Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), são assuntos abordados na primeira e na segunda série do ensino médio. Dessa forma, estes pré-requisitos para o Curso de Introdução ao Cálculo são naturalmente atendidos pelos estudantes da terceira série do ensino médio.

Adicionalmente, é aconselhável (mas não indispensável) que o aluno tenha conhecimentos básicos em geometria analítica (como plano cartesiano e equações de retas). Ainda de acordo com o PCN+ Ensino Médio- Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), este conteúdo é tratado na terceira série do ensino médio. Portanto, sugere-se que o Curso seja ofertado aos alunos quando estes já tiverem trabalhado tal conteúdo.

## **1.5 Infraestrutura necessária**

Para a realização do curso é suficiente uma sala ou auditório, que comporte adequadamente os alunos inscritos, com um quadro e giz (ou pincel). A utilização de recursos audiovisuais digitais fica a critério do docente.

## **1.6 Carga horária**

O curso terá uma duração total de 16 horas, divididas em quatro encontros de 4 horas cada. Cada encontro terá dois períodos de

aproximadamente uma hora e cinquenta minutos, com um intervalo de vinte minutos entre os períodos.

Sugere-se que os encontros sejam semanais em quatro semanas consecutivas. No entanto, caso não seja possível, pode-se dar um intervalo de tempo maior do que uma semana entre um encontro e outro. Este intervalo não deve ultrapassar o período de três semanas, a fim de não comprometer a continuidade dos assuntos.

A proposta é que este seja um curso extracurricular optativo, a ser lecionado fora dos horários regulares de aulas das escolas e que não seja objeto de avaliação para composição das notas dos alunos.

## **1.7 Ementa do curso**

Os conteúdos selecionados para compor o Curso de Introdução ao Cálculo visam fornecer ao aluno o conhecimento dos principais conceitos da disciplina, de uma forma encadeada e sequencial, bem como criar alternativas para a resolução de algumas questões de vestibulares militares.

### *1.7.1 Primeiro encontro*

Uma apresentação do Cálculo, limites de funções reais de uma variável: limites laterais, limites infinitos e no infinito, continuidade de funções, propriedades dos limites, teorema do confronto número de Euler definido como um limite.

### *1.7.2 Segundo encontro*

A derivada de uma função real de uma variável, notações para a derivada, regras de derivação, derivada das principais funções elementares, regra da cadeia, regra de L'Hôspital, aplicações da derivada à cinemática.

### *1.7.3 Terceiro Encontro*

Diferenciação implícita, problemas de taxas relacionadas, valores extremos de uma função, esboço de curvas, problemas de otimização.

### *1.7.4 Quarto Encontro*

A integral de uma função real de uma variável, o teorema fundamental do Cálculo, integrais elementares, aplicação de integrais: cálculo de volumes de sólidos de revolução.

## **1.8 Material**

Para o propósito do curso não é necessária a adoção de um livro didático. Recomenda-se que sejam fornecidas aos alunos as notas de aulas relativas a cada encontro para acompanhamento e anotações extras juntamente com uma lista de exercícios, selecionados preferencialmente de vestibulares militares.

## **1.9 Dinâmica das aulas**

No curso proposto serão apresentadas as ideias gerais sobre o Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável. Devido ao caráter introdutório do curso, deverão ser abdicadas as demonstrações formais dos teoremas e propriedades enunciadas, exceto aquelas que o docente julgar indispensável pelo propósito na construção do conhecimento e que estejam ao alcance da compreensão dos alunos. A teoria deverá ser exposta de forma intuitiva, valendo-se sempre de recursos gráficos para ilustrar as ideias. Os exemplos deverão relacionar elementos já conhecidos pelos alunos (como os gráficos de funções elementares, problemas físicos relacionados à

cinemática, problemas envolvendo a velocidade de reações químicas, entre outros) sendo agora abordados pela perspectiva do Cálculo.

Recomenda-se que em cada encontro, após a exposição dialogada dos conteúdos, seja destinado em torno de uma hora para a resolução e discussão dos exercícios. Neste momento, a critério do docente, os alunos poderão ser divididos em pequenos grupos. Enquanto os alunos desenvolvem esta etapa, o docente deverá fornecer o apoio necessário de forma individual (ou em pequenos grupos), esclarecendo dúvidas, reforçando conceitos e auxiliando na resolução dos exercícios.

## **2 ESTUDO DE CASO: DESENVOLVIMENTO DO CURSO PROPOSTO**

O Colégio e Pré-Vestibular Bernoulli de Belo Horizonte MG, oferta aos seus alunos que irão cursar o 3o ano do ensino médio, a possibilidade de cursar esta etapa em uma turma específica preparatória para os principais vestibulares militares do Brasil: o Instituto Militar de Engenharia-RJ (IME) e o Instituto Tecnológico da Aeronáutica-SP (ITA). Denominada como Pré-Vestibular Extensivo IME/ITA (ou simplesmente turma IME/ITA), esta turma conta com alunos da 3a série do ensino médio, optantes por essa modalidade, bem como alunos do pré-vestibular que desejam ingresso nas instituições militares. O curso oferecido nessa turma possui carga horária e materiais diferenciados das turmas do 3o ano regular, possuindo uma maior ênfase nas disciplinas da área de exatas (conteúdos prioritários para os vestibulares do IME e do ITA). Como parte da preparação diferenciada que esses processos seletivos exigem, é ofertado aos alunos desta turma um curso extracurricular de Introdução ao Cálculo.

Nas seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 será relatado o desenvolvimento do Curso de Introdução ao Cálculo, conforme proposto neste trabalho,

na turma IME/ITA do Colégio e Pré-Vestibular Bernoulli do ano de 2016.

## **2.1 Descrição da turma**

A turma IME/ITA do ano de 2016 era composta por 19 alunos do 3o ano do ensino médio, sendo 16 homens e 3 mulheres, e 14 alunos do pré-vestibular, sendo 12 homens e 2 mulheres. A faixa etária da turma variava entre 16 e 20 anos, com predominância de pessoas com 17 e 18 anos. Em torno de 90% dos alunos do 3o ano eram oriundos do próprio Colégio Bernoulli. Entre os estudantes do pré-vestibular, em torno de 60% eram oriundos de outras escolas e o restante eram alunos que cursaram a 3a série do ensino médio na turma IME/ITA do ano de 2015 e, como não haviam obtido êxito nos processos seletivos do IME e do ITA, retornaram para cursar mais um ano nesta turma.

## **2.2 Organização do Curso**

O Curso de Introdução ao Cálculo da turma IME/ITA de 2016 ocorreu em quatro sábados, a saber: 12 de março, 9 de abril, 25 de junho e 2 de julho. Nestes sábados, os estudantes dessa turma tiveram uma atividade de simulado de prova pela manhã (7:30h às 12:00h) e retornaram à tarde para o encontro da aula de Cálculo (13:00h às 17:00h). Cada encontro foi dividido em dois períodos de aproximadamente 1h e 50 minutos, com um intervalo de 20 minutos entre eles. Os conteúdos foram lecionados através de exposição dialogada, sem a utilização de recursos audiovisuais digitais. Os 50 minutos finais de cada encontro foram destinados à resolução e discussão dos exercícios propostos.

O material disponibilizado aos alunos para o Curso de Introdução ao Cálculo, integrou as apostilas volumes 2, 3 e 4 (de um total de 6 volumes) da turma IME/ITA. Este material foi produzido

pelo autor deste trabalho, sendo baseado em notas de aulas de cursos lecionados em anos anteriores e contendo um total de 62 exercícios propostos.

### **2.3 Análise do comportamento, do interesse e da participação da turma**

De um modo geral, os estudantes que desejam ingressar em instituições militares apresentam grande afinidade com as disciplinas de exatas, já que estas instituições se destinam a cursos de graduação em engenharia. Durante a divulgação do curso, nos primeiros dias de aula do ano letivo, os alunos já demonstraram um grande interesse em cursá-lo, mesmo sendo informados de que os conteúdos abordados não seriam cobrados em suas atividades avaliativas. Acredita-se que tal interesse se deva a ênfase dada para o Cálculo, na divulgação do curso, como uma possível alternativa de resolução de alguns problemas de vestibulares militares. Um fato inusitado ocorreu na semana que antecedeu ao primeiro encontro quando uma aluna, que não iria poder comparecer na aula do dia 12 de março, solicitou autorização para que uma colega de sala gravasse as aulas deste dia para que ela pudesse assistir oportunamente e assim não comprometer o acompanhamento do restante do curso. Após autorização do Colégio, as aulas deste dia foram gravadas.

Como forma de motivação, o início da primeira aula foi reservado para uma apresentação geral da disciplina, incluindo elementos sobre a história do Cálculo e também suas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Na sequência foram tratados os tópicos relacionados aos limites de funções reais de uma variável. O primeiro encontro foi finalizado com um tempo dedicado à resolução dos exercícios propostos relativos a esta aula. Para o momento de resolução dos exercícios, foi permitido que os alunos se organizassem

de forma individual, em duplas ou trios a critério dos próprios alunos. A mudança de organização da turma fez surgir, por alguns instantes, conversas e assuntos não relacionados à aula. No entanto, sem que fosse necessária uma solicitação do docente, gradativamente a maioria dos alunos de fato foi se dedicando a resolução dos exercícios e ao esclarecimento de dúvidas.

O segundo encontro foi destinado à introdução às derivadas. Ao longo da explanação sobre o assunto, alguns alunos perceberam como o Cálculo Diferencial possui relação direta com as ideias da cinemática aprendidas na física. No fim desse encontro, inclusive, um aluno apresentou uma questão de física antiga do IME (dos tempos em que o Cálculo era cobrado diretamente nesse exame) e que de fato utilizava os conceitos apresentados durante a aula, mostrando assim que houve uma compreensão do assunto à medida que este foi capaz de extrapolar o conhecimento aprendido para além da aula. Neste encontro já é apresentado um modelo de questão cobrada atualmente pelo IME e pelo ITA, e que a utilização do Cálculo se apresenta como uma alternativa de resolução viável.

O terceiro encontro destinou-se às aplicações das derivadas. O primeiro assunto abordado (diferenciação implícita) possui uma grande aplicação em problemas de determinação de retas tangentes às curvas, que são frequentemente cobrados nos exames do IME e do ITA. Os exemplos trabalhados foram extraídos dos próprios exames dessas instituições. Os alunos apresentaram grande interesse pelo tópico e reconheceram o Cálculo como uma indicada forma de resolução dessas questões. Nesta aula, foram abordados ainda, situações-problemas possíveis de serem estudados com o Cálculo, como taxas relacionadas, problemas de otimização e esboço de curvas. Nesta aula em particular, a apresentação e discussão dos conteúdos utilizou todo o tempo do

encontro não tendo sido possível a resolução dos exercícios propostos pelos alunos na própria aula.

O quarto encontro foi destinado às noções do Cálculo Integral. Tal assunto, não possui uma aplicabilidade direta para a resolução de questões atuais dos vestibulares militares. Ainda assim, houve um grande interesse por parte dos alunos motivados em conhecer o Teorema Fundamental do Cálculo (um dos teoremas mais importantes da matemática). Este teorema foi apresentado e fornecido uma ideia de demonstração gráfica em um caso particular. Este assunto também possibilitou a demonstração de fórmulas conhecidas e utilizadas no ensino médio que, em geral, são simplesmente enunciadas aos alunos, como por exemplo a área do círculo e os volumes da esfera, da calota circular e do cone.

Uma análise geral do desenvolvimento do curso, mostrou que os alunos participaram ativamente das aulas, colocando seus questionamentos. Em alguns momentos as dúvidas suscitadas estavam além do escopo, como por exemplo, quando questionavam o porquê de algumas propriedades que foram enunciadas sem demonstração (considerando que algumas demonstrações estavam além do escopo do curso).

Acredita-se que o bom embasamento dos alunos acerca dos conteúdos que são pré-requisitos para o Curso tenha contribuído de forma significativa para o acompanhamento, absorção e aproveitamento dos tópicos ensinados.

## **2.4 Dificuldades Observadas**

As dificuldades constatadas nos quatro encontros que compuseram o Curso de Introdução ao Cálculo de 2016, foram extrínsecas ao próprio curso. Como os alunos tinham atividades

programadas pela manhã nos dias dos encontros, observou-se que os mesmos apresentavam cansaço após o primeiro momento de 1 hora e 50 minutos. Esse fato fez com que o ritmo das aulas diminuísse após o intervalo.

Outra dificuldade observada foi o grande intervalo de tempo entre os três primeiros encontros do curso. Devido ao calendário de atividades do Colégio Bernoulli, não foi possível realizar os encontros conforme proposto na seção 2.4.6 (página 9) com intervalos menores que três semanas, de forma que houve um pequeno comprometimento na sequência das ideias. Tal obstáculo foi superado, fazendo uma revisão dos conceitos necessários visto nos encontros anteriores.

Uma dificuldade ocorrida no segundo encontro em especial, foi o fato de que até aquele momento não havia sido abordado o conteúdo Geometria Analítica nas aulas regulares. Como alguns conceitos básicos desse tópico eram necessários, tiveram que ser introduzidos nesse encontro.

### **3 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A incansável busca do ser humano pelo entendimento de como funciona o mundo a sua volta, possibilitou que evoluíssemos de uma espécie pré-histórica para a sociedade globalizada que somos hoje. O desenvolvimento do Cálculo ao longo dos séculos, foi responsável pelo avanço tecnológico em diversas áreas do conhecimento. De fato, essa ferramenta matemática trata-se de um dos maiores feitos do intelecto humano.

Dada a sua relevância, o Cálculo faz parte do conteúdo das escolas secundárias em diversos países. No Brasil, essa relevância foi desconsiderada quando a reforma do ensino de matemática ocorrida na década de 1960 retirou este conteúdo desse nível.

Acredita-se que a inserção do Cálculo no ensino médio seja possível e benéfica aos alunos. Certamente não com a completeza e formalidades como é abordado nas graduações, mas sim, valorizando as ideias e aplicações em situações já estudadas no ensino médio. Ressalta-se que o ensino de alguns tópicos da matemática e de alguns conteúdos de outras disciplinas, como a física e a química, ocorreriam de forma mais natural se fossem feitos à luz do Cálculo.

Embora o Cálculo não conste nos programas de matemática das provas de vestibulares, as instituições militares IME e ITA contemplam em seus processos seletivos questões em que a sua utilização é possível. Para essas questões, de um modo geral, o Cálculo mostra-se como a alternativa mais eficiente de resolução. Dessa forma, a oferta de um Curso de Introdução ao Cálculo para os estudantes que almejam a carreira militar faz-se bastante conveniente. Este curso deve ser ofertado em época oportuna, visto que possui como pré-requisito o conhecimento de diversos tópicos da matemática, geralmente ensinados nas 1a e 2a séries do ensino médio.

O Curso proposto neste artigo buscou divulgar o trabalho realizado em uma turma de preparação específica para os vestibulares do IME e do ITA, realizado no Colégio Bernoulli de Belo Horizonte. Os alunos que optam por essa turma, apresentam grande afinidade com as disciplinas de exatas, em especial com a Matemática. Por essa afinidade e pelo nível de conhecimento exigido nos exames de acesso às instituições pretendidas, observou-se uma motivação natural nos alunos para o aprendizado das ideias apresentadas no curso.

Durante os quatro encontros que compuseram o Curso de Introdução ao Cálculo da turma IME/ITA de 2016, foi possível observar que os alunos conseguiram absorver as ideias apresentadas, pois foram capazes de utilizar a ferramenta Cálculo para a resolução

de questões dos vestibulares do IME e do ITA, bem como relacioná-la em conceitos de física e química.

Ofertado no ensino médio, este Curso abre possibilidades para que o desempenho dos estudantes nos cursos de Cálculo das graduações, seja significativamente melhorado.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. *O ensino de Cálculo no 2º grau*. In: Revista do Professor de Matemática, nº 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

BUSSE R. S.; SOARES F. S. *O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio*. Pôster PO02944174789T: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

CARVALHO, J. B. P. de. *O cálculo na escola secundária – algumas considerações históricas*. Caderno CEDES. Campinas: Papirus, n. 40, p. 68-81, 1996.

MELCHIORS A.; SOARES M. *História do Cálculo Diferencial e Integral*. In: Revista Maiêutica- Curso de Matemática, volume 1, no 1, p. 67-78, 2013.

OLIVEIRA F. R; *Uma Proposta para o Ensino de Noções de Cálculo no Ensino Médio*. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2010.

PCN+ Ensino Médio- *Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Governo Federal. Brasil, 2002.

SILVA, C.R.; SOUZA, K.R.Q. *Cálculo: Uma Proposta Possível para o Ensino Médio*. Revista Panorâmica On-Line. Barra do Garças-MT, vol. 17, p. 81-89, ago/dez. 2014.

STEWART, J. *Cálculo, Volume I*, 5ª Edição. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 581 p., 2006.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1*, 2ª Edição. São Paulo: Editora Makron Books, 737 p., 1994.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. *O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 4, n. 1, p. 18-25, jan. 2009. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2009v4n1p18/12151>>. Acesso em: 05 set. 2017. doi:<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2009v4n1p18>.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Alunos 15, 18, 19, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36

### C

Cálculo 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33,  
34, 35, 36, 37, 38

Curso 15, 20, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36

### E

Ensino 14, 15, 17, 18, 19, 20, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 36, 37

### M

Matemática 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 27, 34, 35, 36

Militares 14, 15, 19, 26, 28, 29, 30, 32, 34, 36

### R

Resolução 14, 15, 19, 20, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36

### V

Vestibulares 14, 15, 20, 21, 26, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 37

## **SOBRE O AUTOR**

Felix Horacio Munoz Muniz Junior possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2008), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Minas Gerais (2013), pós graduação no curso de especialização em Metodologia do Ensino de Matemática pela FAEL (2017) e Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal de Viçosa (2018). É docente efetivo do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais.



# UMA PROPOSIÇÃO DE CURSO DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO COM FOCO EM VESTIBULARES MILITARES

As escolas militares de graduação em engenharia são referências de ensino neste segmento. Os processos seletivos dessas instituições incluem provas escritas que são tradicionalmente conhecidas pelo alto nível exigido dos candidatos. Uma análise das provas aplicadas pelo Instituto Militar de Engenharia (IME) e Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), revelou que, mesmo não sendo atualmente um item constante nos conteúdos programáticos, a utilização do Cálculo (Diferencial e Integral) consiste em uma eficiente alternativa de resolução para algumas questões de matemática.

Felix Horacio Munoz Muniz Junior

RFB Editora  
Home Page: [www.rfbeditora.com](http://www.rfbeditora.com)  
Email: [adm@rfbeditora.com](mailto:adm@rfbeditora.com)  
WhatsApp: 91 98885-7730  
CNPJ: 39.242.488/0001-07  
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,  
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

